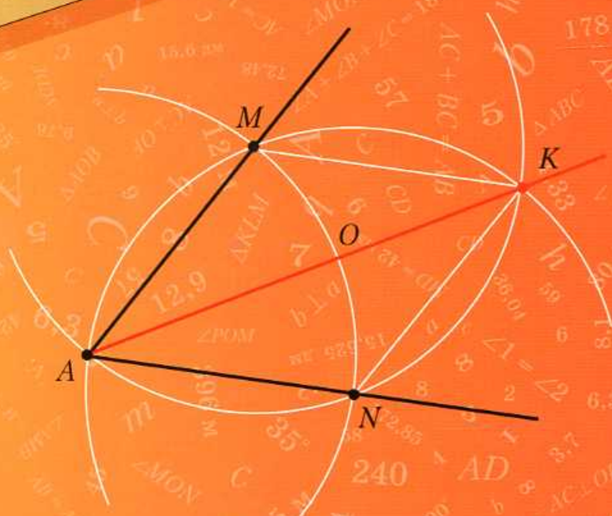
А.Г. Мерзляк
В.Б. Полонский
М.С. Якир

ФГОС

7 класс



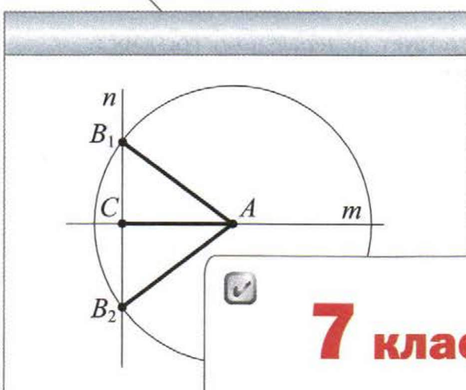
Геометрия

вентана граф

Алгоритм успеха

А.Г. Мерзляк
В.Б. Полонский
М.С. Якир

Геометрия



7 класс

Учебник для учащихся
общеобразовательных организаций

Рекомендовано
Министерством образования и науки
Российской Федерации

Москва
Издательский центр
«Вентана-Граф»
2015

ББК 22.151я72
М52

Учебник включён в федеральный перечень

Мерзляк А.Г.
М52 Геометрия : 7 класс : учебник для учащихся общеобразовательных организаций / А.Г. Мерзляк, В.Б. Полонский, М.С. Якир. – М. : Вентана-Граф, 2015. – 192 с. : ил.
ISBN 978-5-360-05508-2

Учебник предназначен для изучения геометрии в 7 классе общеобразовательных организаций. В нём предусмотрена уровневая дифференциация, позволяющая формировать у школьников познавательный интерес к математике.

Учебник входит в систему учебно-методических комплектов «Алгоритм успеха».

Содержание учебника соответствует федеральному государственному образовательному стандарту основного общего образования (2010 г.).

ББК 22.151я72

Учебное издание

Мерзляк Аркадий Григорьевич
Полонский Виталий Борисович
Якир Михаил Семёнович

Геометрия

7 класс

Учебник для учащихся
общеобразовательных организаций

Редактор *Е.В. Буцко*. Макет, внешнее оформление *Е.В. Чайко*
Художественный редактор *Е.В. Чайко*. Рисунки *Н.К. Вахониной*
Компьютерная вёрстка *О.В. Поповой*. Технический редактор *Е.А. Урвачева*
Корректоры *О.А. Мерзликина, О.Ч. Кохановская*

Подписано в печать 28.08.14. Формат 70×90/16. Гарнитура NewBaskervilleC
Печать офсетная. Бумага офсетная № 1. Печ. л. 12,0. Тираж 10 000 экз. Заказ В-887.

ООО Издательский центр «Вентана-Граф». 127422, Москва, ул. Тимирязевская, д. 1, стр. 3
Тел./факс: (499) 641-55-29, (495) 234-07-53. E-mail: info@vgf.ru, http://www.vgf.ru

Отпечатано в полном соответствии с качеством предоставленного электронного оригинал-макета в типографии филиала ОАО «ТАТМЕДИА» «ПИК „Идел-Пресс"»
420066, г. Казань, ул. Декабристов, 2. E-mail: idelpress@mail.ru

ISBN 978-5-360-05508-2

От авторов

Дорогие семиклассники!

Вы начинаете изучать новый учебный предмет – **геометрию**. Обратите внимание, что в словах «география» и «геометрия» одинаковая часть – «гео», что в переводе с греческого означает «земля». Но если на уроках географии в 6 классе вы действительно занимались землеописанием («графия» – по-гречески «описание»), то на уроках геометрии вам не придётся заниматься землемерием («метрео» – по-гречески «мерить»).

Геометрия – одна из самых древних наук. Её название можно объяснить тем, что зарождение и развитие геометрии было тесно связано с разнообразной практической деятельностью человека: разметкой границ земельных участков, строительством дорог, оросительных каналов, зданий и других сооружений, т. е. геометрия, как говорят в таких случаях, была *прикладной наукой*. Постепенно, шаг за шагом человечество накапливало знания, и геометрия превратилась в красивую и совершенную, строгую и последовательную математическую теорию. Знакомиться с этой наукой и учиться применять полученные знания на практике вы и будете на уроках геометрии.

Знать геометрию чрезвычайно важно. Действительно, посмотрите вокруг – везде геометрия, точнее, **геометрические фигуры**: отрезки, треугольники, прямоугольники, прямоугольные параллелепипеды, шары и т. п.

Без глубоких геометрических знаний не могли появиться сложные строительные конструкции (рис. 1, 2), корабли (рис. 3), самолёты и даже детский конструктор и узоры вышивок (рис. 4). Создание узоров требует от мастерицы знания таких геометрических понятий, как симметрия и параллельный перенос. Не зная геометрии, невозможно стать хорошим инженером-конструктором, токарем, столяром, учёным, архитектором, дизайне-

Рис. 1

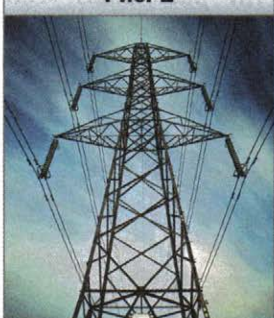


Рис. 2

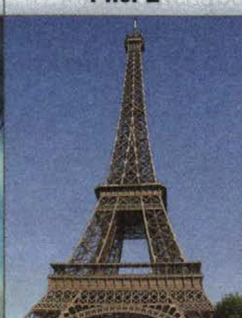


Рис. 3

Рис. 4

ром, модельером, специалистом в области компьютерной графики и т. д. Вообще, геометрические знания – важнейшая составляющая человеческой культуры.

Геометрия – очень интересный предмет. Мы надеемся, что вы в этом скоро убедитесь, и поможет этому учебник, который вы держите в руках. Познакомьтесь с его структурой.

Учебник разделён на четыре главы, каждая из которых состоит из параграфов. В них изложен теоретический материал, при изучении которого особое внимание обращайте на тексты, выделенные **шрифтом**.

Как правило, изложение теоретического материала завершается примерами решения задач. Эти записи можно рассматривать как один из возможных образцов оформления решения.

К каждому параграфу подобраны задачи для самостоятельного решения, к которым мы советуем приступать только после усвоения теоретического материала. Среди заданий есть как простые и средние по сложности упражнения, так и трудные задачи.

Каждый параграф завершает особая рубрика, которую мы назвали «Наблюдайте, рисуйте, конструируйте, фантазируйте». В ней собраны задачи, для решения которых нужны не специальные геометрические знания, а смекалка, изобретательность и сообразительность. Они развивают «геометрическое зрение» и интуицию.

Кроме того, в учебнике вы сможете прочитать рассказы по истории геометрии.

Дерзайте! Желаем успеха!

Условные обозначения

○ Простые задачи

○○ Задачи среднего уровня сложности

✧ Сложные задачи

✲ Задачи для математических кружков и факультативов

Ключевые задачи, результат которых можно использовать при решении других задач

◂ Окончание доказательства теоремы или решения задачи

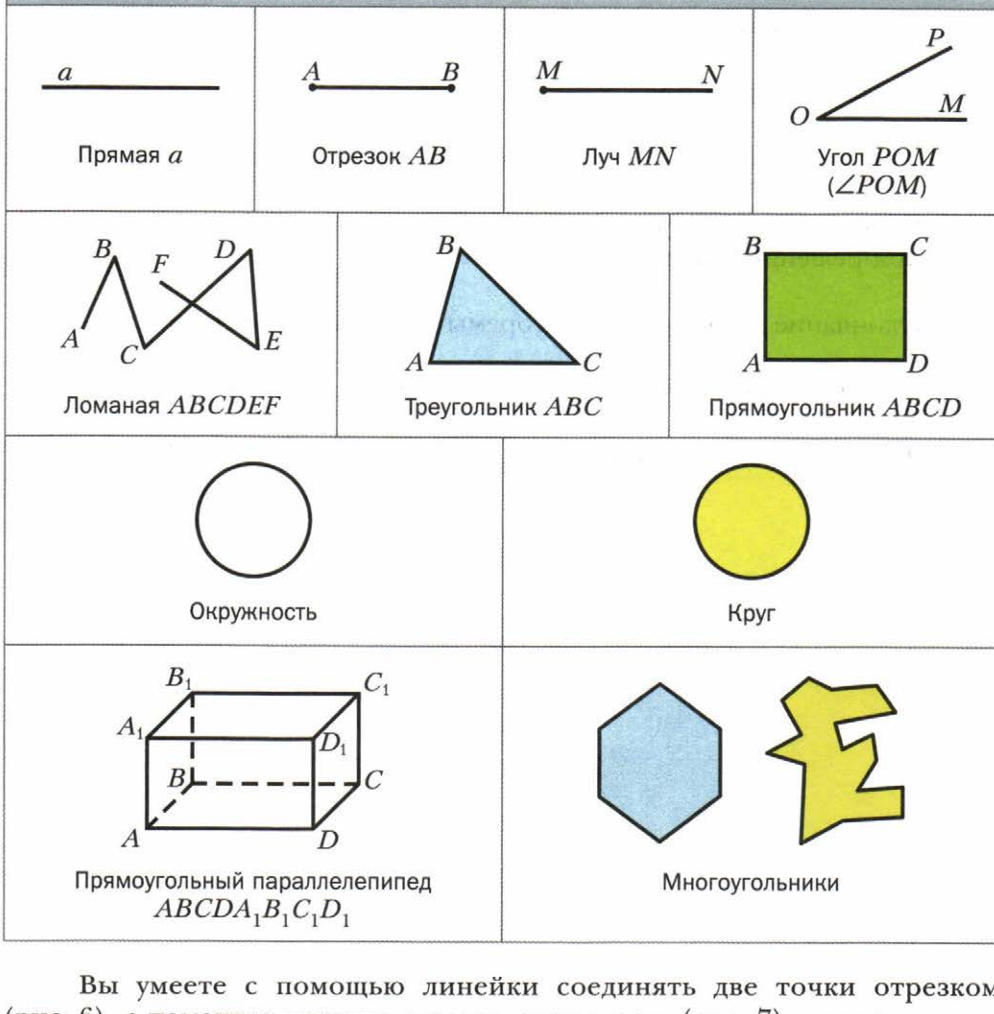
439 Задания, рекомендуемые для домашней работы

480 Задания для устной работы

Что изучает геометрия?

Геометрия – для вас новый учебный предмет. На уроках математики вы уже знакомились с азами этой мудрой науки. Все геометрические фигуры, изображённые на рисунке 5, вам уже хорошо известны.

Рис. 5



Вы умеете с помощью линейки соединять две точки отрезком (рис. 6), с помощью циркуля строить окружность (рис. 7), с помощью линейки и угольника проводить перпендикулярные и параллельные прямые (рис. 8), измерять длину отрезка и строить отрезок заданной длины с помощью линейки с миллиметровыми делениями (рис. 9), находить величину уг-

Рис. 6

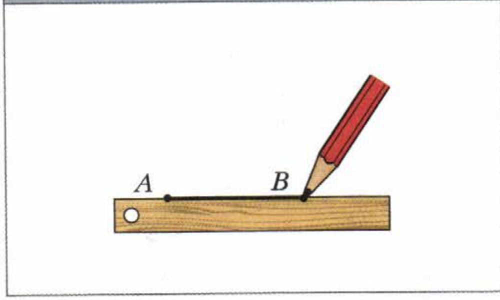


Рис. 7

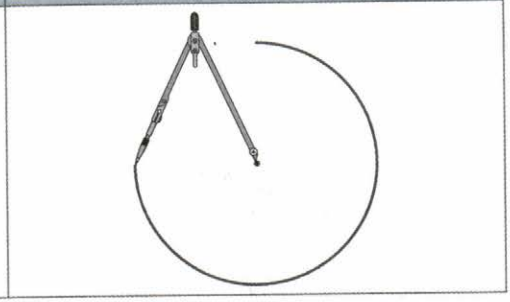


Рис. 8

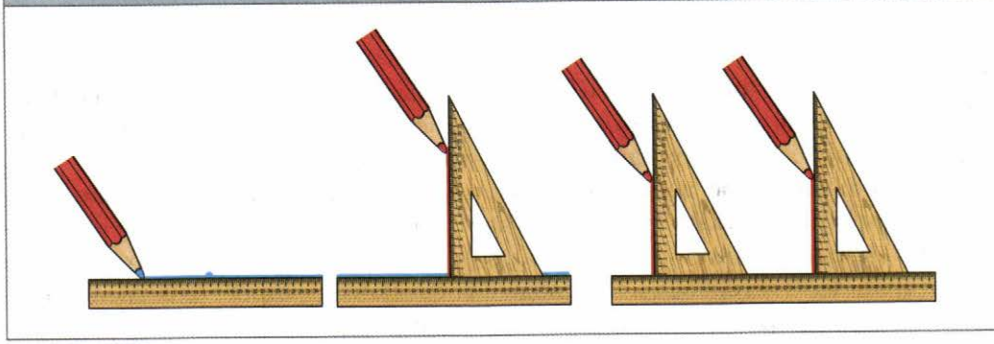
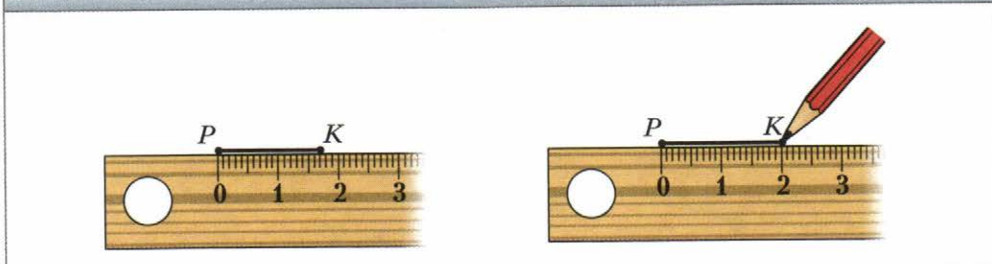


Рис. 9

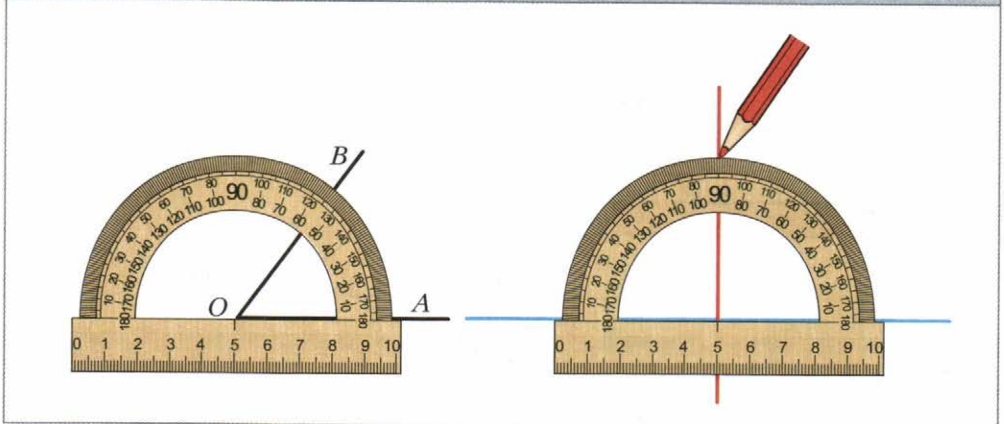


ла и строить угол заданной величины с помощью транспортира (рис. 10), классифицировать треугольники.

Однако знать, как «выглядит» фигура, или уметь выполнять простейшие построения — это всего лишь самые начальные знания *науки о свойствах геометрических фигур*, т. е. *геометрии*.

При изучении *систематического курса* геометрии вы будете постепенно в определённой последовательности изучать свойства геометриче-

Рис. 10



ских фигур, а следовательно, и сами фигуры, как знакомые вам, так и новые. Это означает, что вы должны научиться, используя одни свойства фигуры, находить, а главное, **доказывать** другие её свойства.

Школьный курс геометрии традиционно делится на **планиметрию** и **стереометрию**. Планиметрия изучает фигуры на плоскости («планум» в переводе с латинского – «плоскость»). В стереометрии изучают фигуры в пространстве («стереос» в переводе с греческого – «пространственный»).

Итак, мы приступаем к изучению планиметрии.

Глава 1. Простейшие геометрические фигуры и их свойства

В этой главе рассматриваются знакомые вам из курса математики геометрические фигуры: точки, прямые, отрезки, лучи и углы.

Вы узнаете больше о свойствах этих фигур. Некоторые из этих свойств научитесь **доказывать.** Слова **определение**, **теорема**, **аксиома** станут для вас привычными, понятными и часто употребляемыми.

§ 1. Точки и прямые

Точка – самая простая геометрическая фигура. Это единственная фигура, которую нельзя разбить на части. Например, каждая из фигур, изображённых на рисунке 11, разбита на части. И даже о фигуре, изображённой на рисунке 12, состоящей из двух точек, можно сказать, что она состоит из двух частей: точки A и точки B.

Рис. 11

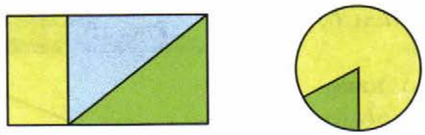
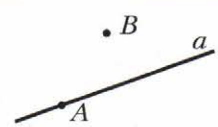


Рис. 12

Рис. 13



На рисунке 13 изображены прямая a и две точки A и B. Говорят, что *точка A принадлежит прямой a*, или *точка A лежит на прямой a*, или *прямая a проходит через точку A* и, соответственно, *точка B не принадлежит прямой a*, или *точка B не лежит на прямой a*, или *прямая a не проходит через точку B*.

Прямая – это геометрическая фигура, обладающая определёнными свойствами.

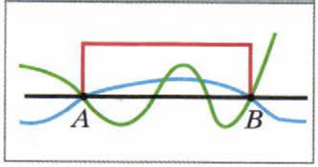
Основное свойство прямой

Через любые две точки можно провести прямую, и притом только одну.

Это утверждение называют аксиомой (что такое аксиома, вы узнаете в § 6).

Здесь и в дальнейшем, говоря «две точки», «три точки», «две прямые» и т. д., будем иметь в виду, что это разные точки и разные прямые. Случай их совпадения будем оговаривать особо.

Рис. 14



Почему это свойство прямой – основное?

Через точки A и B можно провести много различных *линий* (рис. 14). Прямая же задаётся этими точками однозначно. В этом и состоит суть основного свойства прямой.

Это свойство позволяет обозначать прямую, называя две любые её точки. Так, прямую, проведённую через точки M и N, называют «прямая MN» (или «прямая NM»).

Если хотят разъяснить смысл какого-либо слова (термина), то используют **определения**. Например:

1) часами называют прибор для измерения времени;

2) геометрия – это раздел математики, изучающий свойства фигур.

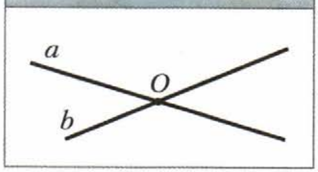
Определения есть и в геометрии.

Определение

Две прямые, имеющие общую точку, называют пересекающимися.

На рисунке 15 изображены прямые a и b, пересекающиеся в точке O.

Рис. 15



Часто справедливость (истинность) какого-либо факта приходится устанавливать с помощью *логических рассуждений*.

Рассмотрим такую задачу. Известно, что все жители Геометрической улицы – математики. Женя живёт по адресу: ул. Геометрическая, 5. Является ли Женя математиком?

Из условия задачи следует, что Женя живёт на Геометрической улице. А поскольку все жители этой улицы математики, то Женя – математик.

Приведённые логические рассуждения называют **доказательством** того факта, что Женя – математик.

В математике утверждение, истинность которого устанавливают с помощью доказательства, называют **теоремой**.

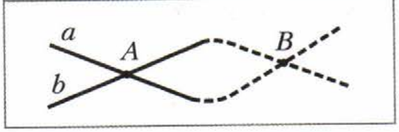
Теорема 1.1

Любые две пересекающиеся прямые имеют только одну общую точку.

Доказательство

Пусть пересекающиеся прямые a и b, помимо общей точки A, имеют ещё одну общую точку B (рис. 16). Тогда через две точки A и B проходят две прямые. А это противоречит основному свойству прямой. Следовательно, наше предположение о существовании второй точки пересечения прямых a и b неверно. ◄

Рис. 16



1. Какую фигуру нельзя разбить на части?
2. Сформулируйте основное свойство прямой.
3. Какое свойство прямой позволяет обозначать её, называя любые две точки прямой?
4. Для чего используют определения?
5. Какие две прямые называют пересекающимися?
6. Как называют утверждение, истинность которого устанавливают с помощью доказательства?
7. Сформулируйте теорему о двух пересекающихся прямых.

Практические задания

1. Проведите прямую, обозначьте её буквой m. Отметьте точки A и B, лежащие на этой прямой, и точки C, D, E, не лежащие на ней.
2. Отметьте точки M и K и проведите через них прямую. Отметьте на этой прямой точку E. Запишите все возможные обозначения полученной прямой.
3. Проведите прямые a и b так, чтобы они пересекались. Обозначьте точку их пересечения буквой C. Принадлежит ли точка C прямой a? Прямой b?
4. Отметьте три точки так, чтобы они не лежали на одной прямой, и через каждую пару точек проведите прямую. Сколько образовалось прямых?
5. Отметьте четыре точки, никакие три из которых не лежат на одной прямой.

6. Проведите три прямые так, чтобы каждые две из них пересекались. Отметьте точки пересечения этих прямых. Сколько можно получить точек пересечения?
7. Отметьте четыре точки так, чтобы при проведении прямой через каждые две из них на рисунке образовалось: 1) одна прямая; 2) четыре прямых; 3) шесть прямых. Проведите эти прямые.

Упражнения

8. Пользуясь рисунком 17:

1) определите, пересекаются ли прямые a и MK.

2) укажите все отмеченные точки, принадлежащие прямой a; прямой MK;

3) укажите все отмеченные точки, не принадлежащие прямой a; прямой MK;

4) укажите все отмеченные точки, принадлежащие прямой a, но не принадлежащие прямой MK;

9. Пользуясь рисунком 18, укажите:

1) какие из отмеченных точек принадлежат прямой p, а какие не принадлежат ей;

2) каким прямым принадлежит каждая из точек A, B, C, D и E;

3) какие прямые проходят через каждую из точек C, B и A;

4) в какой точке пересекаются прямые k и p, m и k;

5) в какой точке пересекаются три из четырёх изображённых на рисунке прямых.

Рис. 17

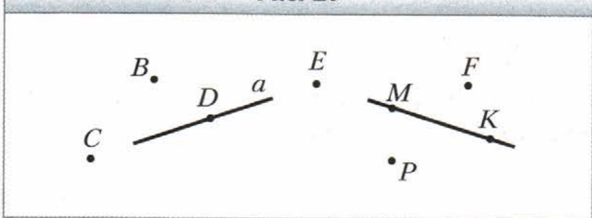
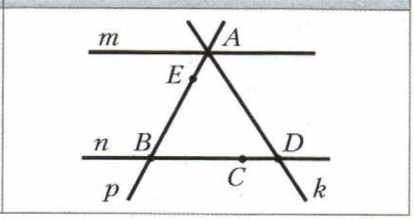


Рис. 18



10. Точка C принадлежит прямой AB. Являются ли различными прямые AB и AC? Ответ обоснуйте.

11. Провели четыре прямые, каждые две из которых пересекаются, причём через каждую точку пересечения проходят только две прямые. Сколько точек пересечения при этом образовалось?

12. Как надо расположить шесть точек, чтобы они определяли шесть прямых?

13. Данную прямую пересекают четыре прямые. Сколько может образоваться точек пересечения этих прямых с данной?

14. Провели четыре прямые, каждые две из которых пересекаются. Сколько точек пересечения может образоваться?

15. Провели пять прямых, каждые две из которых пересекаются. Каково наименьшее возможное количество точек пересечения этих прямых? Какое наибольшее количество точек пересечения может образоваться?

16. Можно ли провести шесть прямых и отметить на них 11 точек так, чтобы на каждой прямой было отмечено ровно четыре точки?

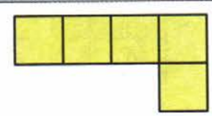
17. На плоскости проведены три прямые. На первой прямой отметили пять точек, на второй – семь точек, а на третьей – три точки. Каким может быть наименьшее количество отмеченных точек?

18. Можно ли отметить несколько точек и провести несколько прямых так, чтобы на каждой прямой лежало ровно три отмеченные точки и через каждую точку проходило ровно три из проведённых прямых?

Наблюдайте, рисуйте, конструируйте, фантазируйте

19. Из фигурок, имеющих вид уголка (рис. 19), сложите квадрат.

Рис. 19



§ 2. Отрезок и его длина

На рисунке 20 изображена прямая a, проходящая через точки A и B. Эти точки ограничивают часть прямой a, выделенную синим цветом. Такую часть прямой вместе с точками A и B называют **отрезком**, а точки A и B – **концами** этого отрезка.

Для любых двух точек M и N существует *единственный* отрезок, для которого эти точки являются концами (рис. 21), т. е. *отрезок своими концами задаётся однозначно*. Отрезок на рисунке 21 обозначают так: MN или NM (читают: «отрезок MN» или «отрезок NM»).

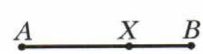
На рисунке 22 изображены отрезок AB и точка X, принадлежащая этому отрезку, но не совпадающая ни с одним из его концов. Точку X называют **внутренней** точкой отрезка AB. В этом случае также говорят, что точка X **лежит между** точками A и B.

Таким образом, отрезок AB состоит из точек A и B, а также всех точек прямой AB, лежащих между точками A и B.

Рис. 20

Рис. 21

Рис. 22



Определение

Два отрезка называют равными, если их можно совместить наложением.

На рисунке 23 изображены равные отрезки AB и CD. Пишут: $AB = CD$.

Вы знаете, что каждый отрезок имеет определённую длину, и для её измерения надо выбрать **единичный отрезок**. В качестве единичного можно выбрать любой отрезок.

Рис. 23

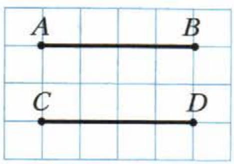
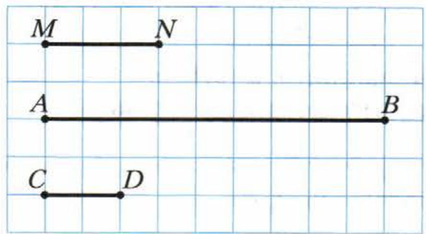


Рис. 24



Например, будем считать отрезок MN на рисунке 24 единичным. Этот факт записывают так: $MN = 1$ ед. Тогда длину отрезка AB считают равной **трём единицам длины** и записывают $AB = 3$ ед. Также принята запись $AB =$ $= 3$, её читают: «отрезок AB равен трём». Для отрезка CD имеем: $CD = \frac{2}{3}$.

На практике чаще всего используют такие единичные отрезки: 1 мм, 1 см, 1 дм, 1 м, 1 км.

Рис. 25

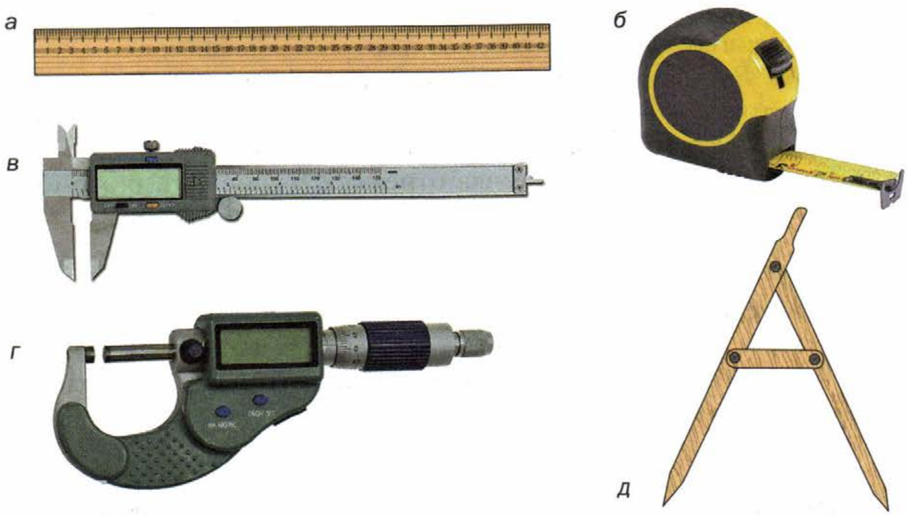
В зависимости от выбора единицы длины меняется **числовое значение длины** отрезка. Например, на рисунке 25 имеем: $AB = 17$ мм, или $AB = 1{,}7$ см, или $AB = 0{,}17$ дм и т. д.

На производстве и в быту используют различные приборы для измерения длины отрезка: линейку с делениями (рис. 26, *а*), рулетку (рис. 26, *б*), штангенциркуль (рис. 26, *в*), микрометр (рис. 26, *г*), полевой циркуль (рис. 26, *д*).

Равные отрезки имеют равные длины, и наоборот, *если длины отрезков равны, то равны и сами отрезки*.

Если длина отрезка AB больше длины отрезка MN, как, например, на рисунке 24, то будем говорить, что отрезок AB больше отрезка MN, и записывать: $AB > MN$. Также можно сказать, что отрезок MN меньше отрезка AB, и записать: $MN < AB$.

Рис. 26



В дальнейшем, говоря «сумма отрезков», будем подразумевать сумму длин этих отрезков.

Рис. 27

$AB = AC + CB$

Основное свойство длины отрезка

Если точка C является внутренней точкой отрезка AB, то отрезок AB равен сумме отрезков AC и CB, т. е.

$$AB = AC + CB \text{ (рис. 27).}$$

Определение

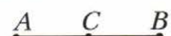
Расстоянием между точками A и B называют длину отрезка AB.

Если точки A и B совпадают, то расстояние между ними считают равным нулю.

Определение

Серединой отрезка AB называют такую его точку C, что $AC = CB$.

Рис. 28



На рисунке 28 точка C – середина отрезка AB.

Задача. Точки A, B и C принадлежат одной прямой, $AB = 8$ см, отрезок AC на 2 см длиннее отрезка BC. Найдите длины отрезков AC и BC.

Решение. В условии не указано, каково взаимное расположение данных точек на прямой. Поэтому рассмотрим три возможных случая.

1) Точка B – внутренняя точка отрезка AC (рис. 29). Тогда отрезок AC длиннее отрезка BC на длину отрезка AB, т. е. на 8 см. Это противоречит условию. Следовательно, такой случай невозможен.

2) Точка C – внутренняя точка отрезка AB (рис. 30). В этом случае $AC + BC = AB$. Пусть $BC = x$ см, тогда $AC = (x + 2)$ см. Имеем:

$x + 2 + x = 8;$

$x = 3.$

Следовательно, $BC = 3$ см, $AC = 5$ см.

3) Точка A – внутренняя точка отрезка BC (рис. 31). В этом случае $AB + AC = BC$ и тогда $AC < BC$. Это противоречит условию. Следовательно, такой случай невозможен.

Ответ: $AC = 5$ см, $BC = 3$ см. ◄

Рис. 29

Рис. 30

Рис. 31

1. Сколько существует отрезков, концами которых являются две данные точки?
2. Из каких точек состоит отрезок AB?
3. Какие два отрезка называют равными?
4. Какие длины имеют равные отрезки?
5. Что можно сказать об отрезках, имеющих равные длины?
6. Сформулируйте основное свойство длины отрезка.
7. Можно ли любой отрезок выбрать в качестве единичного?
8. Что называют расстоянием между двумя точками?
9. Чему равно расстояние между двумя совпадающими точками?
10. Какую точку называют серединой отрезка AB?

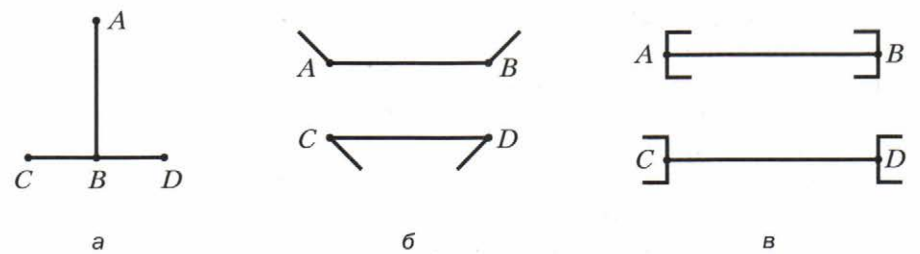
Практические задания

20. Отметьте две точки A и B и проведите через них прямую. Отметьте точки C, D и E, принадлежащие отрезку AB, и точки F, M и K, не принадлежащие отрезку AB, но принадлежащие прямой AB.

21. Проведите прямую и отметьте на ней три точки. Сколько образовалось отрезков?

22. Отметьте на прямой точки A, B, C и D так, чтобы точка C лежала между точками A и B, а точка D – между точками B и C.

Рис. 32

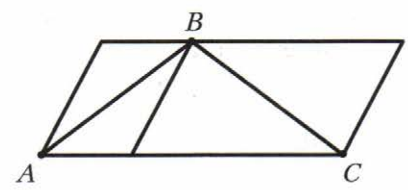


23. Отметьте на прямой точки A, B и C так, чтобы выполнялось равенство $AC = AB + BC$.

24. Сравните на глаз отрезки AB и CD (рис. 32). Проверьте свои выводы измерением.

25. Сравните на глаз отрезки AB и BC (рис. 33). Проверьте свой вывод измерением.

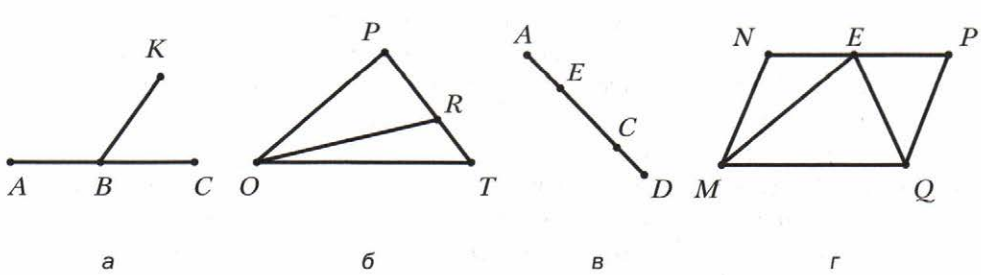
Рис. 33



Упражнения

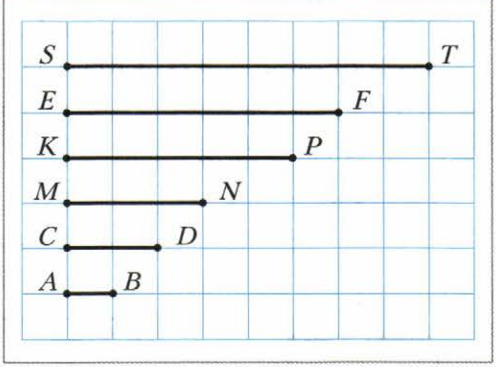
26. Назовите все отрезки, изображённые на рисунке 34.

Рис. 34



27. Найдите длину каждого из отрезков, изображённых на рисунке 35, если единичный отрезок равен отрезку: 1) AB; 2) MN.

Рис. 35



28. Какая из точек, отмеченных на рисунке 36, лежит между двумя другими? Запишите соответствующее равенство, следующее из основного свойства длины отрезка.

29. Между какими точками лежит точка B (рис. 37)? Для каждого случая запишите соответствующее равенство, следующее из основного свойства длины отрезка.

30. Точка D – внутренняя точка отрезка ME. Найдите:
1) расстояние между точками M и E, если $MD = 1{,}8$ дм, $DE = 2{,}6$ дм;
2) длину отрезка MD, если $ME = 42$ мм, $DE = 1{,}5$ см.

31. Точки A, B и C лежат на одной прямой (рис. 38). Какое из следующих утверждений верно:
1) $AB + BC = AC$; 2) $AC + AB = BC$?

Рис. 36

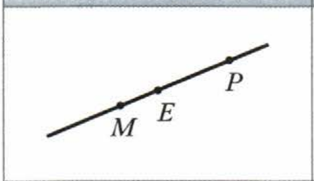


Рис. 37

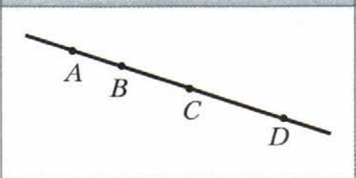
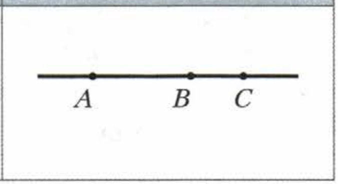


Рис. 38



32. Точка K является серединой отрезка MN. Можно ли совместить наложением: 1) отрезки MK и KN; 2) отрезки MK и MN?

33. Точка K – середина отрезка MN, точка E – середина отрезка KN, $EN = 5$ см. Найдите длины отрезков MK, ME и MN.

34. Точка C – внутренняя точка отрезка AB, длина которого равна 20 см. Найдите длины отрезков AC и BC, если: 1) длина отрезка AC на 5 см больше длины отрезка BC; 2) длина отрезка AC в 4 раза меньше длины отрезка BC; 3) $AC : BC = 9 : 11$.

35. Точка K принадлежит отрезку CD, длина которого равна 28 см. Найдите длины отрезков CK и KD, если: 1) длина отрезка CK на 4 см меньше длины отрезка KD; 2) длина отрезка CK в 6 раз больше длины отрезка KD; 3) $CK : KD = 3 : 4$.

36. Отрезки AB и CD равны (рис. 39). Докажите, что отрезки AC и BD также равны.

Рис. 39

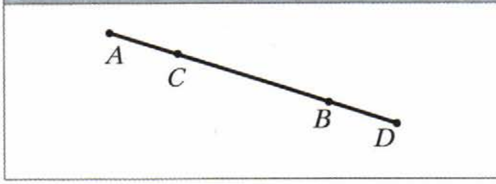
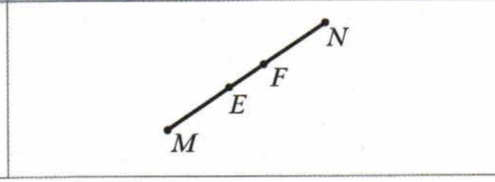


Рис. 40



37. Отрезки ME и FN равны (рис. 40). Докажите, что $MF = EN$.

38. Точка C делит отрезок AB, длина которого равна a, на два отрезка. Найдите расстояние между серединами отрезков AC и BC.

39. Точки A, B и C лежат на одной прямой. Найдите длину отрезка BC, если $AB = 24$ см, $AC = 32$ см. Сколько решений имеет задача?

40. На прямой отмечены точки A, B и C так, что $AB = 15$ см, $AC = 9$ см. Найдите расстояние между серединами отрезков AB и AC.

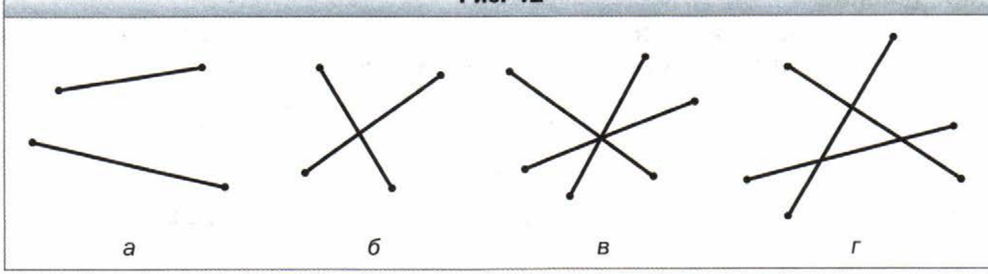
41. Длина отрезка EF равна 12 см. Найдите на прямой EF все точки, для которых сумма расстояний от концов отрезка EF до этих точек равна: 1) 12 см; 2) 15 см; 3) 10 см.

42. Через точки A и B проведена прямая. Где на этой прямой лежит точка C, расстояние от которой до точки B в 2 раза больше расстояния от неё до точки A?

43. Отрезок, длина которого равна 32 см, разделили на три неравных отрезка. Расстояние между серединами крайних отрезков равно 18 см. Найдите длину среднего отрезка.

44. Какое наименьшее количество внутренних точек надо отметить на отрезках, изображённых на рисунке 41, чтобы на каждом из них было отмечено по две внутренние точки?

Рис. 41



45. Сколько точек надо отметить между точками A и B, чтобы вместе с отрезком AB образовалось шесть отрезков?

46. На шкале линейки нанесены только деления 0 см, 5 см и 13 см (рис. 42). Как, пользуясь этой линейкой, можно построить отрезок длиной: 1) 3 см; 2) 2 см; 3) 1 см?

Рис. 42

47. На шкале линейки нанесены только деления 0 см, 7 см и 11 см. Как, пользуясь этой линейкой, можно построить отрезок длиной: 1) 8 см; 2) 5 см?

Наблюдайте, рисуйте, конструируйте, фантазируйте

48. Составьте из прямоугольников размерами 1×1, 1×2, 1×3, ... , 1×13 прямоугольник, каждая сторона которого больше 1.

§ 3. Луч. Угол. Измерение углов

Проведём прямую AB и отметим на ней произвольную точку O. Эта точка разбивает прямую на две части, выделенные на рисунке 43 разными цветами. Каждую из этих частей вместе с точкой O называют **лучом** или **полупрямой**. Точку O называют **началом** луча.

Каждый из лучей, изображённых на рисунке 43, состоит из точки O и всех точек прямой AB, *лежащих по одну сторону от точки O*.

Это позволяет обозначать луч, называя две его точки: первой обязательно указывают начало луча, второй – любую другую точку, принадлежащую лучу. Так, луч с началом в точке O (рис. 44) можно обозначить OM или ON.

Лучи OA и OB (см. рис. 43) дополняют друг друга до прямой. Также можно сказать, что объединением этих лучей является прямая.

Определение

Два луча, имеющие общее начало и лежащие на одной прямой, называют дополнительными.

Рис. 43

Рис. 44

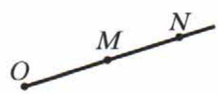
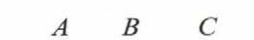
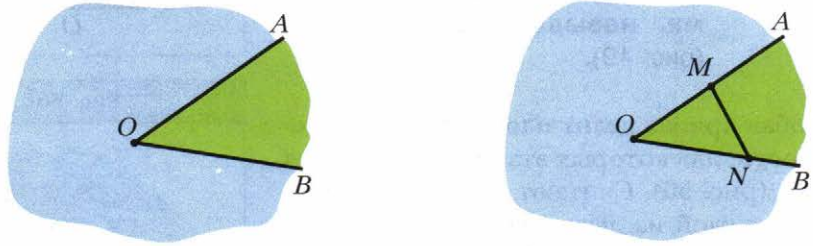


Рис. 45



Например, лучи BC и BA – дополнительные (рис. 45). Заметим, что, объединив лучи CA и AC, мы тоже получим прямую AC. Однако эти лучи не являются дополнительными: у них нет общего начала.

Рис. 46



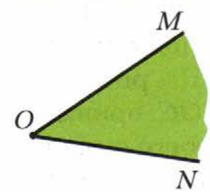
а *б*

На рисунке 46, *а* изображена фигура, состоящая из двух лучей OA и OB, имеющих общее начало. Эта фигура делит плоскость на две части, выделенные разными цветами. Каждую из этих частей вместе с лучами OA и OB называют **углом**.

Лучи OA и OB называют **сторонами** угла, а точку O – **вершиной** угла.

Как видим, углы на рисунке 46, *а* внешне существенно различаются. Это различие определено следующим свойством. На лучах OA и OB выберем произвольно точки M и N (рис. 46, *б*). Отрезок MN принадлежит «зелёному» углу, а «синему» углу принадлежат лишь концы отрезка.

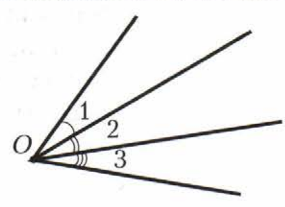
Рис. 47



В дальнейшем, говоря «угол», будем подразумевать лишь тот из них, который содержит любой отрезок с концами на его сторонах. Ситуации, в которых придётся рассматривать углы, не обладающие этим свойством, будут специально оговариваться.

Есть несколько способов обозначения углов. Угол на рисунке 47 можно обозначить так: $\angle MON$, или $\angle NOM$, или просто $\angle O$ (читают соответственно: «угол MON», «угол NOM», «угол O»).

Рис. 48

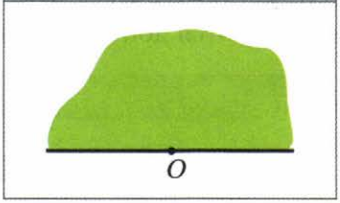


На рисунке 48 изображено несколько углов, имеющих общую вершину. Здесь обозначение угла одной буквой может привести к путанице. В таких случаях углы удобно обозначать с помощью цифр: $\angle 1$, $\angle 2$, $\angle 3$ (читают соответственно: «угол один», «угол два», «угол три»).

Определение

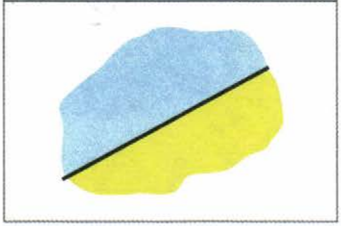
Угол, стороны которого являются дополнительными лучами, называют развёрнутым (рис. 49).

Рис. 49



Любая прямая делит плоскость на две **полуплоскости**, для которых эта прямая является **границей** (рис. 50). Считают, что прямая принадлежит каждой из двух полуплоскостей, для которых она является границей. А так как стороны развёрнутого угла образуют прямую, то можно также сказать, что развёрнутый угол – это полуплоскость, на границе которой отмечена точка – вершина угла.

Рис. 50

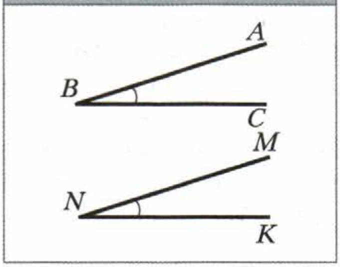


Определение

Два угла называют равными, если их можно совместить наложением.

На рисунке 51 изображены равные углы ABC и MNK. Пишут: $\angle ABC = \angle MNK$.

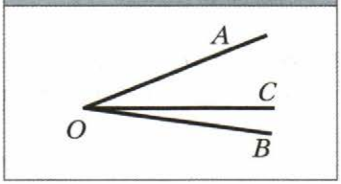
Рис. 51



Понятно, что все развёрнутые углы равны.

На рисунке 52 изображены угол AOB и луч OC, принадлежащий этому углу, но отличный от его сторон. Будем говорить, что луч OC *проходит между сторонами угла* AOB и делит его на два угла AOC и COB.

Рис. 52

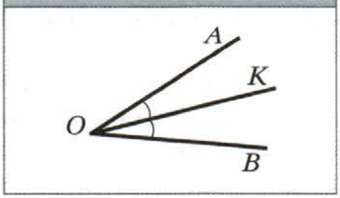


Определение

Биссектрисой угла называют луч с началом в вершине угла, делящий этот угол на два равных угла.

На рисунке 53 луч OK – биссектриса угла AOB. Значит, $\angle AOK = \angle KOB$.

Рис. 53



Вы знаете, что каждый угол имеет величину. Для её измерения нужно выбрать единицу измерения – **единичный угол**. Выбрать его можно, например, так. Разделим развёрнутый угол на 180 равных углов (рис. 54). Угол, образованный двумя соседними лучами, принимают за единичный. Его величину называют **градусом** и записывают: 1°.

Рис. 54

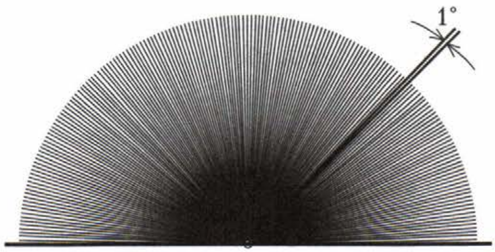
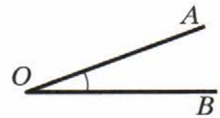


Рис. 55



Например, градусная мера (величина) угла AOB (рис. 55) равна 20° (этот факт легко установить с помощью транспортира). В таком случае говорят: «угол AOB равен 20°» и записывают $\angle AOB = 20^\circ$.

Градусная мера развёрнутого угла равна 180°.

На практике, помимо транспортира, используют и другие приборы специального назначения: астролябию (рис. 56), теодолит (рис. 57) – для измерения на местности; буссоль (рис. 58) – в артиллерии; секстант (рис. 59) – в мореплавании.

Рис. 56

Рис. 57

Рис. 58

Рис. 59

Для более точных результатов измерения углов используют части градуса: $\frac{1}{60}$ градуса равна одной минуте ($1'$), т. е. $1^\circ = 60'$; $\frac{1}{60}$ минуты называют секундой ($1''$), т. е. $1' = 60''$. Например, запись $23^\circ 15' 11''$ означает, что градусная мера угла составляет 23 градуса 15 минут 11 секунд.

Существуют и другие единицы измерения углов, например, моряки используют единицу 1 румб ($11°15'$).

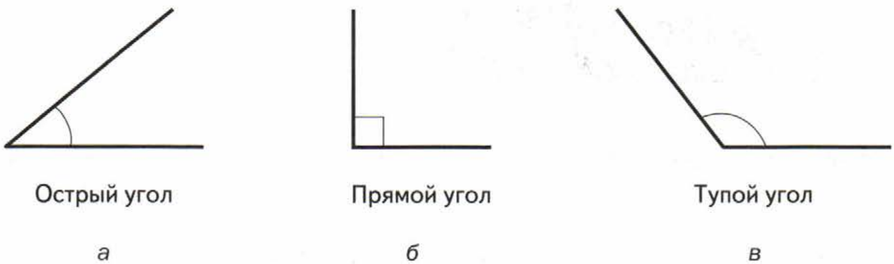
Определения

Угол, градусная мера которого меньше 90°, называют острым (рис. 60, *а*).

Угол, градусная мера которого равна 90°, называют прямым (рис. 60, *б*).

Угол, градусная мера которого больше 90°, но меньше 180°, называют тупым (рис. 60, *в*).

Рис. 60



Равные углы имеют равные величины, и наоборот, *если величины углов равны, то равны и сами углы.*

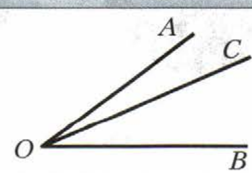
Если величина угла ABC больше величины угла MNP, то говорят, что угол ABC больше угла MNP, и записывают $\angle ABC > \angle MNP$.

В дальнейшем, говоря «сумма углов», будем подразумевать сумму величин этих углов.

Основное свойство величины угла

Если луч OC делит угол AOB на два угла AOC и COB, то $\angle AOB = \angle AOC + \angle COB$ (рис. 61).

Рис. 61



Задача. На рисунке 62 $\angle AMC = \angle DMB$, $\angle BMC = 118°$. Найдите угол AMB*.

* Здесь и далее: вместо «Найдите градусную меру угла...» будем говорить «Найдите угол...».

Решение.

Имеем: $\angle AMC = \angle AMB + \angle BMC$,

$\angle DMB = \angle DMC + \angle BMC$.

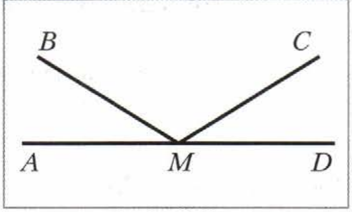
Так как $\angle AMC = \angle DMB$, то $\angle AMB = \angle DMC$.

Запишем: $\angle AMB + \angle BMC + \angle CMD = \angle AMD = 180^\circ$.

Тогда $2\angle AMB + 118^\circ = 180^\circ$; $\angle AMB = 31^\circ$.

Ответ: 31°. ◄

Рис. 62



1. Как называют фигуру, образованную точкой, принадлежащей прямой, и одной из частей, на которые эта точка делит прямую? Как при этом называют данную точку?

2. Как обозначают луч?

3. Какие два луча называют дополнительными?

4. Как называют фигуру, образованную двумя лучами с общим началом и одной из частей, на которые эти лучи делят плоскость? Как при этом называют данные лучи? Их общее начало?

5. Как обозначают угол?

6. Какой угол называют развёрнутым?

7. Как называют части, на которые прямая делит плоскость?

8. Какие два угла называют равными?

9. Что называют биссектрисой угла?

10. В каких единицах измеряют углы?

11. Какова градусная мера развёрнутого угла?

12. Как называют угол, градусная мера которого равна 90°?

13. Какой угол называют острым?

14. Какой угол называют тупым?

15. Какие величины равных углов?

16. Что можно сказать об углах, величины которых равны?

17. Сформулируйте основное свойство величины угла.

Практические задания

49. Проведите два луча AB и AC так, чтобы они не были дополнительными. Постройте для каждого из этих лучей дополнительный луч. Обозначьте и запишите все образовавшиеся лучи.

50. Проведите отрезок AB и два луча AB и BA. Являются ли эти лучи дополнительными? Ответ обоснуйте.

51. Начертите угол MNE и проведите лучи NA и NC между его сторонами. Запишите все образовавшиеся углы.

52. Проведите лучи OA, OB, OC и OD так, чтобы луч OC проходил между сторонами угла AOB, а луч OD – между сторонами угла BOC.

53. Начертите два луча так, чтобы их общая часть была: 1) точкой; 2) отрезком; 3) лучом.

Упражнения

54. Прямая EF пересекает прямые AB и CD (рис. 63). Укажите:
1) все образовавшиеся лучи с началом в точке M;
2) все пары дополнительных лучей с началом в точке K.

55. Запишите все лучи, изображённые на рисунке 64. Укажите, какие из них являются дополнительными лучами с началом в точке O.

56. Можно ли угол, изображённый на рисунке 65, обозначить так:

1) $\angle ABC$; 3) $\angle ADC$; 5) $\angle ACE$; 7) $\angle BDE$;
2) $\angle ACD$; 4) $\angle DCA$; 6) $\angle BCD$; 8) $\angle ECD$?

Рис. 63

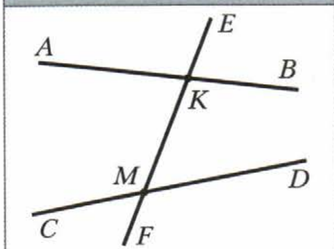


Рис. 64

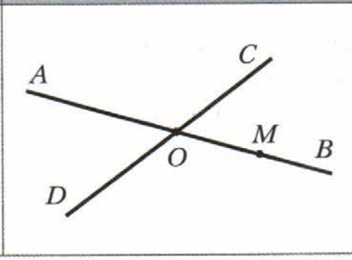
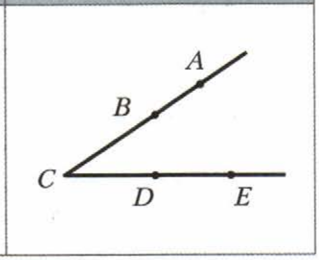


Рис. 65



57. Запишите все углы, изображённые на рисунке 66.

58. На рисунке 67 $\angle AOB = \angle BOC = \angle COD = \angle DOE = \angle EOF$.
1) Какой луч является биссектрисой угла AOC? Угла DOF? Угла BOF?
2) Биссектрисой каких углов является луч OC?

59. На рисунке 68 луч OC – биссектриса угла AOB. Можно ли совместить наложением: 1) углы AOC и BOC; 2) углы AOC и AOB?

Рис. 66

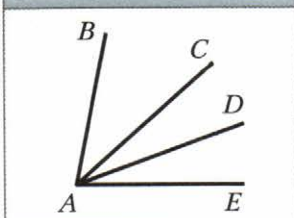


Рис. 67

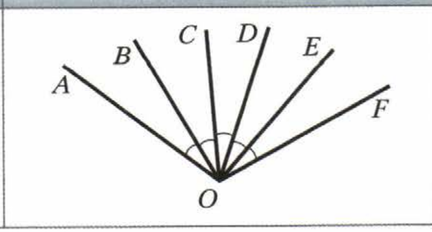
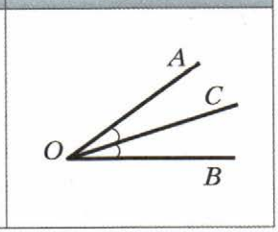


Рис. 68



60. Луч BD делит угол ABC на два угла. Найдите: 1) угол ABC, если $\angle ABD = 54°$, $\angle CBD = 72°$; 2) угол CBD, если $\angle ABC = 158°$, $\angle ABD = 93°$.

61. Луч OP проходит между сторонами угла MOK. Найдите угол MOP, если $\angle MOK = 172°$, $\angle POK = 85°$.

62. Верно ли утверждение:

1) угол, который меньше тупого, – острый;
2) угол, который меньше развёрнутого, – тупой;
3) угол, в 2 раза меньший тупого, – острый;
4) сумма двух острых углов больше прямого угла;
5) угол, в 2 раза меньший развёрнутого угла, больше любого острого угла;
6) угол, который больше прямого, – тупой?

63. Из вершины прямого угла BOM (рис. 69) провели два луча OA и OC так, что $\angle BOC = 74°$, $\angle AOM = 62°$. Найдите угол AOC.

64. Из вершины развёрнутого угла ACP (рис. 70) провели два луча CT и CF так, что $\angle ACF = 158°$, $\angle TCP = 134°$. Найдите угол TCF.

Рис. 69

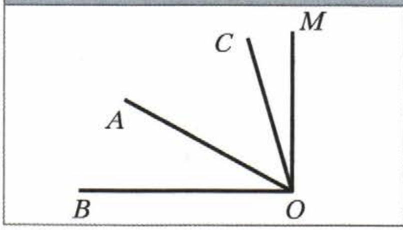
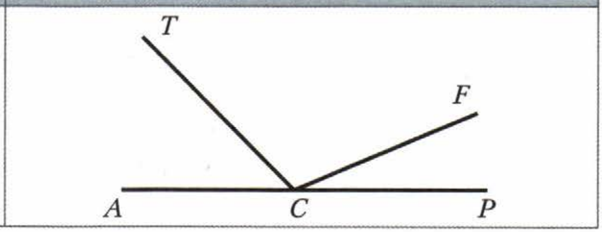


Рис. 70

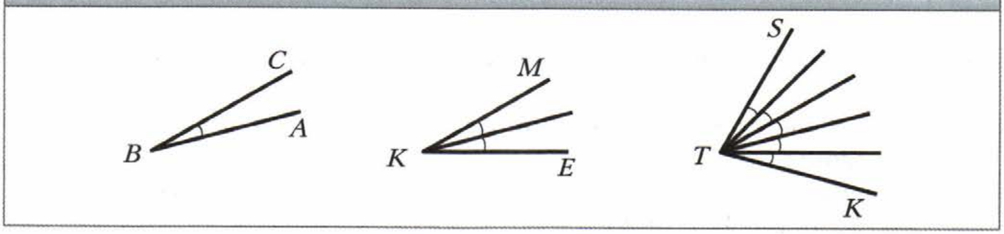


65. Угол CEF равен 152°, луч EM проходит между его сторонами, угол CEM на 18° больше угла FEM. Найдите углы CEM и FEM.

66. Луч AK принадлежит углу BAD. Найдите углы BAK и DAK, если угол BAK в 7 раз меньше угла DAK и $\angle BAD = 72°$.

67. На рисунке 71 равные углы отмечены дугами. Найдите углы ABC, MKE и STK, если в качестве единичного угла взять: 1) угол ABC; 2) угол MKE.

Рис. 71



68. Точки A, B и C расположены на прямой AB так, что $AB = 3{,}2$ см, $AC = 4{,}8$ см, $BC = 8$ см. Являются ли лучи AB и AC дополнительными?

69. На рисунке 72 угол ABC – прямой, $\angle ABE = \angle EBF = \angle FBC$, лучи BD и BK – биссектрисы углов ABE и FBC соответственно. Найдите угол DBK.

70. На рисунке 73 $\angle AOC = \angle COD = \angle DOF$, луч OB – биссектриса угла AOC, луч OE – биссектриса угла DOF, $\angle BOE = 72°$. Найдите угол AOF.

Рис. 72

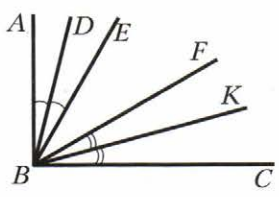
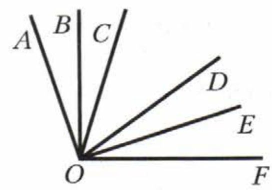


Рис. 73



71. На рисунке 74 $\angle AOB = \angle DOC$. Есть ли ещё на этом рисунке равные углы? Ответ обоснуйте.

72. Углы FOK и MOE равны (рис. 75). Равны ли углы FOM и KOE?

73. Луч BK является биссектрисой угла CBD, $\angle ABK = 146°$ (рис. 76). Найдите угол CBD.

Рис. 74

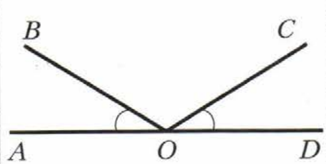


Рис. 75

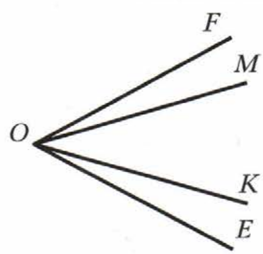
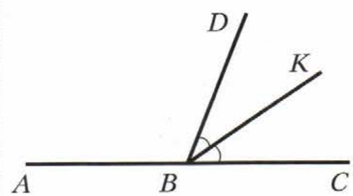


Рис. 76



74. Луч BK является биссектрисой угла CBD, $\angle CBD = 54°$. Найдите угол ABK.

75. На сколько градусов поворачивается за 1 мин: 1) минутная стрелка; 2) часовая стрелка?

76. Найдите угол между стрелками часов, если они показывают: 1) 3 ч; 2) 6 ч; 3) 4 ч; 4) 11 ч; 5) 7 ч.

77. Угол ABC равен 30°, угол CBD – 80°. Найдите угол ABD. Сколько решений имеет задача?

78. Найдите угол MOK, если $\angle MON = 120°$, $\angle KON = 43°$. Сколько решений имеет задача?

79. Луч, проведённый из вершины прямого угла, делит его на два угла. Докажите, что угол между биссектрисами образовавшихся углов равен 45°.

80. Как, имея шаблон угла, равного 70°, построить угол, равный 40°?

81. Как, имея шаблон угла, равного 40°, построить угол, равный: 1) 80°; 2) 160°; 3) 20°?

82. Как, используя шаблон угла, равного 13°, построить угол, равный 2°?

83. Как построить угол, равный 1°, используя шаблон угла, равного: 1) 19°; 2) 7°?

84. Проведите шесть прямых, пересекающихся в одной точке. Верно ли, что среди образовавшихся при этом углов есть угол, который меньше 31°?

Наблюдайте, рисуйте, конструируйте, фантазируйте

85. Не отрывая карандаша от бумаги, проведите через девять точек (рис. 77) четыре отрезка (возвращаться в исходную точку не обязательно).

Рис. 77

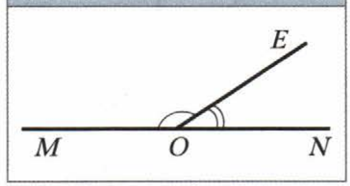
§ 4. Смежные и вертикальные углы

Определение

Два угла называют смежными, если у них одна сторона общая, а две другие являются дополнительными лучами.

На рисунке 78 углы MOE и EON – смежные.

Рис. 78



Теорема 4.1

Сумма смежных углов равна 180°.

Доказательство

Пусть углы AOC и COB – смежные (рис. 79). Надо доказать, что $\angle AOC + \angle COB = 180°$.

Так как углы AOC и COB смежные, то лучи OA и OB являются дополнительными. Тогда $\angle AOB$ – развёрнутый. Следовательно, $\angle AOB = 180°$. Луч OC принадлежит углу AOB. По основному свойству величины угла имеем: $\angle AOC + \angle COB = \angle AOB = 180°$. ◄

Определение

Два угла, отличные от развёрнутого, называют вертикальными, если стороны одного угла являются дополнительными лучами сторон другого.

На рисунке 80 углы AOB и COD – вертикальные.

Очевидно, что при пересечении двух прямых образуются две пары вертикальных углов. На рисунке 80 углы AOC и BOD – также вертикальные.

Теорема 4.2

Вертикальные углы равны.

Доказательство

На рисунке 81 углы 1 и 2 – вертикальные. Надо доказать, что $\angle 1 = \angle 2$.

Каждый из углов 1 и 2 смежный с углом 3. Тогда $\angle 1 + \angle 3 = 180°$ и $\angle 2 + \angle 3 = 180°$. Отсюда $\angle 1 = 180° - \angle 3$ и $\angle 2 = 180° - \angle 3$. Получаем, что градусные меры углов 1 и 2 равны, а значит, равны и сами углы. ◄

Рис. 79

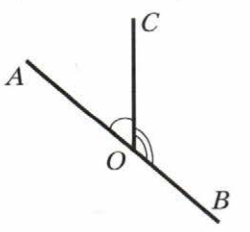


Рис. 80

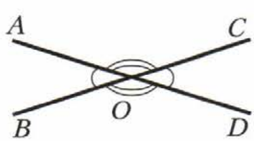
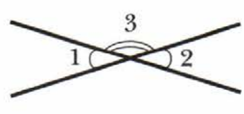


Рис. 81



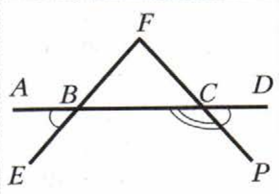
Задача. На рисунке 82 $\angle ABE = \angle DCP$. Докажите, что $\angle FBC + \angle BCP = 180°$.

Решение. $\angle DCP + \angle BCP = 180°$, так как $\angle DCP$ и $\angle BCP$ – смежные. $\angle DCP = \angle ABE$ по условию. Углы ABE и FBC равны как вертикальные.

Следовательно, $\angle DCP = \angle FBC$. Тогда $\angle FBC + \angle BCP = 180°$. ◄

1. Какие два угла называют смежными?
2. Чему равна сумма смежных углов?
3. Какие два угла называют вертикальными?
4. Сформулируйте теорему о свойстве вертикальных углов.

Рис. 82



Практические задания

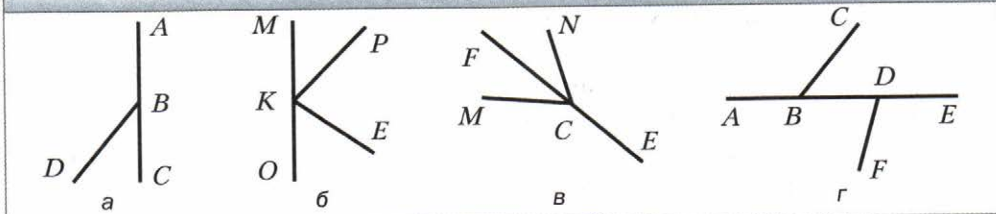
86. Начертите три угла: острый, прямой и тупой. Для каждого из них постройте смежный угол.

87. Начертите два неравных смежных угла так, чтобы их общая сторона была вертикальной.

Упражнения

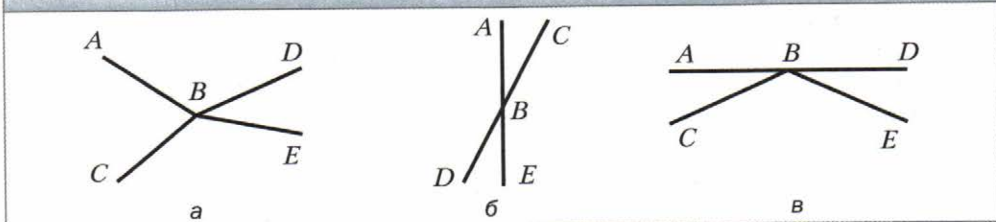
88. Укажите пары смежных углов (рис. 83).

Рис. 83



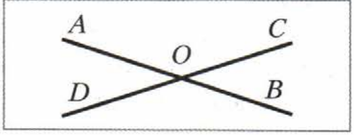
89. Являются ли углы ABC и DBE вертикальными (рис. 84)?

Рис. 84



90. Сколько пар смежных углов изображено на рисунке 85? Назовите их. Укажите пары вертикальных углов.

Рис. 85



91. Могут ли два смежных угла быть равными: 1) 24° и 156°; 2) 63° и 107°? Ответ обоснуйте.

92. Найдите угол, смежный с углом: 1) 29°; 2) 84°; 3) 98°; 4) 135°.

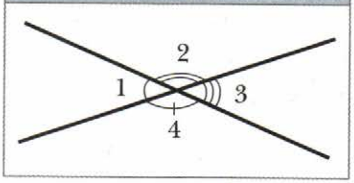
93. Может ли пара смежных углов состоять:
1) из двух острых углов;
2) из двух тупых углов;
3) из прямого и тупого углов;
4) из прямого и острого углов?

94. Один из смежных углов – прямой. Каким является второй угол?

95. Найдите угол, смежный с углом ABC, если: 1) $\angle ABC = 36^\circ$; 2) $\angle ABC = 102^\circ$.

96. Найдите углы 2, 3 и 4 (рис. 86), если $\angle 1 = 42^\circ$.

Рис. 86



97. Найдите смежные углы, если:
1) один из них на 70° больше второго;
2) один из них в 8 раз меньше второго;
3) их градусные меры относятся как $3 : 2$.

98. Найдите смежные углы, если:
1) один из них в 17 раз больше второго;
2) их градусные меры относятся как $19 : 26$.

99. Верно ли утверждение:
1) для каждого угла, отличного от развёрнутого, можно построить только один вертикальный угол;
2) для каждого угла, отличного от развёрнутого, можно построить только один смежный угол;
3) если углы равны, то они вертикальные;
4) если углы не равны, то они не вертикальные;
5) если углы не вертикальные, то они не равны;
6) если два угла смежные, то один из них острый, а второй – тупой;
7) если два угла смежные, то один из них больше другого;
8) если сумма двух углов равна 180°, то они смежные;
9) если сумма двух углов не равна 180°, то они не смежные;
10) если два угла равны, то смежные с ними углы также равны;
11) если смежные углы равны, то они прямые;
12) если равные углы имеют общую вершину, то они вертикальные;
13) если два угла имеют общую сторону, то они смежные?

100. Сумма двух углов, образованных при пересечении двух прямых, равна 140°. Докажите, что эти углы – вертикальные.

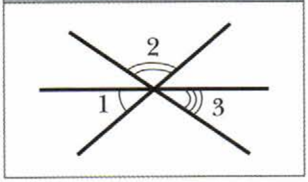
101. Найдите углы, образованные в результате пересечения двух прямых, если:

1) сумма двух из них равна 106°;
2) сумма трёх из них равна 305°.

102. Найдите углы, образованные при пересечении двух прямых, если разность двух из них равна 64°.

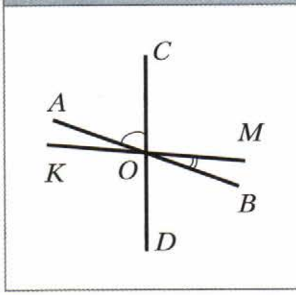
103. Три прямые пересекаются в одной точке (рис. 87). Найдите $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3$.

Рис. 87



104. Прямые AB, CD и MK пересекаются в точке O (рис. 88), $\angle AOC = 70°$, $\angle MOB = 15°$. Найдите $\angle DOK$, $\angle AOM$ и $\angle AOD$.

Рис. 88



105. Найдите угол между биссектрисами смежных углов.

106. Найдите угол между биссектрисами вертикальных углов.

107. Углы ABF и FBC – смежные, $\angle ABF = 80°$, луч BD принадлежит углу ABF, $\angle ABD = 30°$. Найдите угол между биссектрисами углов DBF и FBC.

108. Углы AOB и BOC – смежные, луч OD – биссектриса угла AOB, угол BOD на 18° меньше угла BOC. Найдите углы AOB и BOC.

109. Найдите смежные углы MKE и PKE, если угол FKE на 24° больше угла PKE, где луч KF – биссектриса угла MKE.

110. На рисунке 89 $\angle MAB + \angle ACB = 180°$. Докажите, что $\angle MAB = \angle KCB$.

111. На рисунке 90 $\angle MBC = \angle BEF$. Докажите, что $\angle ABE + \angle BED = 180°$.

112. Два угла имеют общую сторону, а их сумма равна 180°. Являются ли эти углы смежными?

Рис. 89

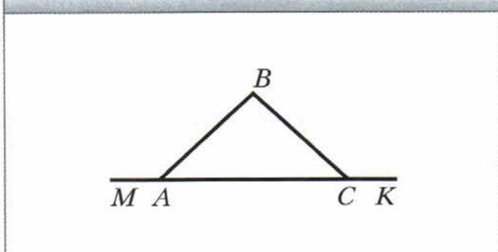
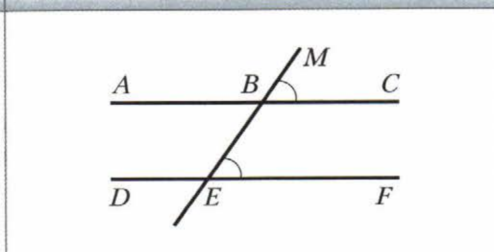


Рис. 90



Наблюдайте, рисуйте, конструируйте, фантазируйте

113. Разделите фигуру, изображённую на рисунке 91, на шесть частей двумя прямыми.

§ 5. Перпендикулярные прямые

При пересечении прямых a и b образовалось четыре угла (рис. 92). Легко показать (сделайте это самостоятельно), что если один из углов прямой (например, угол 1), то и углы 2, 3 и 4 также прямые.

Определение

Две прямые называют перпендикулярными, если при их пересечении образовался прямой угол.

На рисунке 92 прямые a и b – перпендикулярные. Пишут: $a \perp b$ или $b \perp a$.

На рисунке 93 прямые AD и BC не перпендикулярны. При их пересечении образовались пара равных острых углов и пара равных тупых углов. Величину образовавшегося острого угла называют **углом между прямыми** AD и BC.

Если прямые перпендикулярны, то считают, что угол между ними равен 90°.

Рис. 91

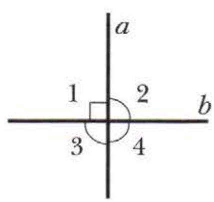


Рис. 92

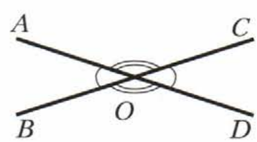


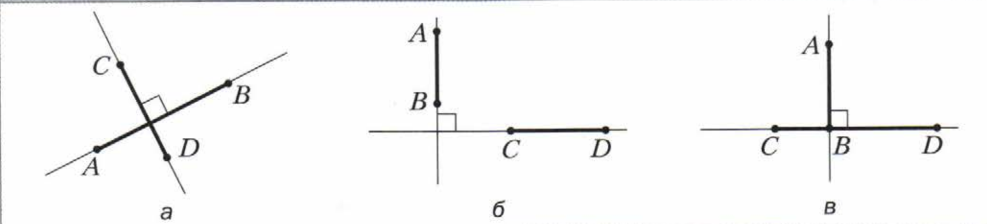
Рис. 93

Определение

Два отрезка называют перпендикулярными, если они лежат на перпендикулярных прямых.

На рисунке 94 отрезки AB и CD – перпендикулярные. Пишут: $AB \perp CD$.

Рис. 94



Также можно говорить о перпендикулярности двух лучей, луча и отрезка, прямой и луча, отрезка и прямой. Например, на рисунке 95 изображены перпендикулярные отрезок CD и луч AB.

На рисунке 96 изображены прямая a и перпендикулярный ей отрезок AB, конец B которого принадлежит прямой a. В таком случае говорят, что из точки A на прямую a опустили **перпендикуляр** AB. Точку B называют **основанием перпендикуляра** AB.

Длину перпендикуляра AB называют **расстоянием от точки** A **до прямой** a. Если точка A принадлежит прямой a, то естественно считать, что расстояние от точки A до прямой a равно нулю.

На рисунке 97 изображён перпендикуляр OM, опущенный из точки O на прямую AB. Точка M, его основание, принадлежит отрезку AB (лучу AB). В таких случаях длину этого перпендикуляра также называют расстоянием от точки O до отрезка AB (луча AB).

Если точка принадлежит отрезку (лучу), то естественно считать, что расстояние от этой точки до отрезка (луча) равно нулю.

Опустим из точки A на прямую a перпендикуляр AB (рис. 98). Пусть X – произвольная точка прямой a, отличная от точки B. Отрезок AX называют **наклонной**, проведённой из точки A к прямой a.

Рис. 95

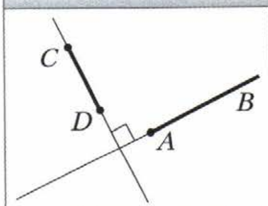


Рис. 96

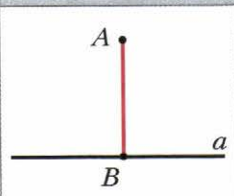


Рис. 97

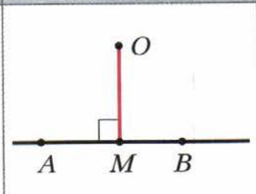
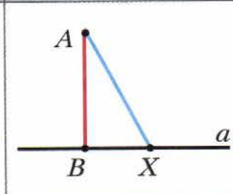


Рис. 98



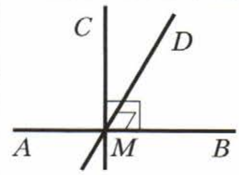
Теорема 5.1

Через каждую точку прямой проходит только одна прямая, перпендикулярная данной.

Доказательство

Отметим на прямой AB произвольную точку M и построим прямой угол CMB (рис. 99). Тогда $CM \perp AB$.

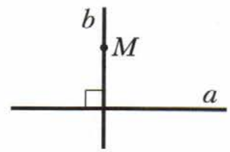
Рис. 99



Предположим, что через точку M проходит ещё одна прямая MD, отличная от прямой CM и перпендикулярная прямой AB.

Рассмотрим случай, когда луч MD принадлежит углу CMB. Тогда по основному свойству величины угла $\angle CMB = \angle CMD + \angle DMB$. Отсюда $\angle CMB > \angle DMB$. Однако $\angle CMB = \angle DMB = 90°$. Следовательно, наше предположение неверно.

Рис. 100



Аналогично рассматривают случай, когда луч MC принадлежит углу DMB. ◄

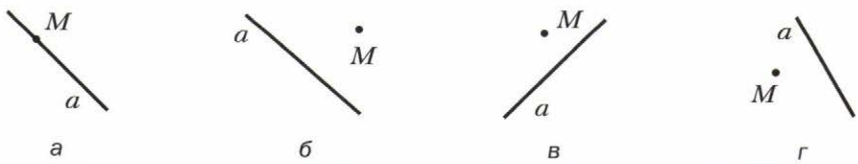
Вы умеете через произвольную точку M, не принадлежащую прямой a, проводить прямую b, перпендикулярную прямой a (рис. 100). То, что такая прямая b единственная, докажем в § 7.

1. Если при пересечении двух прямых один из образовавшихся углов — прямой, то какими являются остальные углы?
2. Какие две прямые называют перпендикулярными?
3. Каким символом обозначают перпендикулярные прямые?
4. Как читают запись $m \perp n$?
5. Что называют углом между двумя пересекающимися прямыми?
6. Какие два отрезка называют перпендикулярными?
7. Что называют расстоянием от точки до прямой?
8. Сколько через каждую точку прямой можно провести прямых, перпендикулярных данной?

Практические задания

114. Перерисуйте в тетрадь рисунок 101. Пользуясь угольником, проведите через точку M прямую, перпендикулярную прямой a.

Рис. 101



115. Проведите прямую c и отметьте на ней точку K. Пользуясь угольником, проведите через точку K прямую, перпендикулярную прямой c.

116. Проведите прямую d и отметьте точку M, не принадлежащую ей. С помощью угольника проведите через точку M прямую, перпендикулярную прямой d.

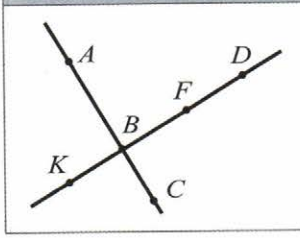
117. Начертите угол ABK, равный: 1) 73°; 2) 146°. Отметьте на луче BK точку C и проведите через неё прямые, перпендикулярные прямым AB и BK.

118. Начертите два перпендикулярных отрезка так, чтобы они: 1) пересекались; 2) не имели общих точек; 3) имели общий конец.

119. Начертите два перпендикулярных луча так, чтобы они: 1) пересекались; 2) не имели общих точек.

Упражнения

Рис. 102



120. На рисунке 102 прямые AC и DK – перпендикулярные. Перпендикулярны ли: 1) отрезки AB и BK; 2) отрезки BC и DF; 3) лучи BC и BK; 4) отрезок AB и луч FD?

121. Может ли угол между прямыми быть равным: 1) 1°; 2) 90°; 3) 92°?

122. Докажите, что если биссектрисы углов AOB и BOC перпендикулярны, то точки A, O и C лежат на одной прямой.

123. На рисунке 103 $AB \perp CD$, $\angle COK = 42°$, $\angle MOC + \angle BOK = 130°$. Найдите: 1) $\angle MOK$; 2) $\angle MOD$.

124. На рисунке 104 $AC \perp DK$, $OB \perp BF$, $\angle DBO = 54°$. Найдите угол ABF.

125. Угол ABC равен 160°, лучи BK и BM проходят между сторонами этого угла и перпендикулярны им. Найдите угол MBK.

126. На рисунке 105 $BF \perp AC$, $BD \perp BK$. Докажите, что $\angle ABD = \angle FBK$.

Рис. 103

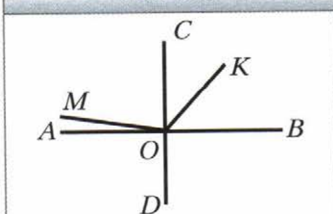


Рис. 104

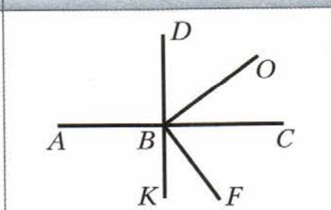
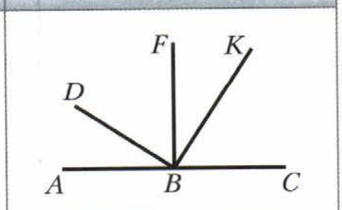


Рис. 105



127. На рисунке 105 $\angle ABD = \angle FBK$, $\angle DBF = \angle KBC$. Докажите, что $BF \perp AC$.

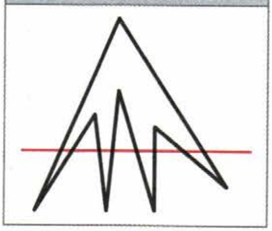
128. Из вершины угла ABC, равного 70°, проведены лучи BD и BF так, что $BD \perp BA$, $BF \perp BC$, лучи BD и BC принадлежат углу ABF. Найдите углы DBF и ABF.

129. Пользуясь угольником и шаблоном угла 17°, постройте угол, равный: 1) 5°; 2) 12°.

130. Пользуясь угольником и шаблоном угла 20°, постройте угол, равный 10°.

Наблюдайте, рисуйте, конструируйте, фантазируйте

Рис. 106



131. На рисунке 106 прямая пересекает все стороны восьмиугольника. Может ли прямая пересекать все стороны тринадцатиугольника, не проходя ни через одну из его вершин?

§ 6. Аксиомы

В предыдущих параграфах были доказаны четыре теоремы. Каждый раз, доказывая новое свойство фигуры, мы опирались на ранее известные геометрические факты. Например, при доказательстве теоремы о вертикальных углах было использовано свойство смежных углов. Руководствуясь этим принципом, мы докажем ещё много новых теорем. Но уже сейчас, на начальном этапе изучения геометрии, возникает естественный вопрос: если свойства геометрических фигур изучают по принципу «новое из старого», то должны существовать первоначальные факты, и тогда на чём основано их доказательство? Ведь до них никаких истинных утверждений не было. Решить эту проблему можно единственным способом: принять первые свойства без доказательств. Так и поступают математики. Эти свойства называют **аксиомами**.

В качестве аксиом выбирают утверждения, которые просты, очевидны, не вызывают сомнений. Ведь недаром слово «аксиома», происходящее от греческого «аксиос», означает «достойное признания».

Некоторые аксиомы были сформулированы в предыдущих параграфах. Они назывались **основными свойствами** и их названия выделены синим цветом.

Часть аксиом мы не выделяли каким-то специальным образом, а просто формулировали как наглядно очевидные утверждения. Так, в § 2 были сформулированы такие аксиомы:

для любых двух точек существует единственный отрезок, для которого эти точки являются концами; каждый отрезок имеет определённую длину.

Мы опирались и на некоторые другие истинные утверждения, принятые без доказательства, т. е. по сути аксиомы, но не сформулированные в явном виде. Например, в § 1, описывая рисунок 13, мы фактически использовали такую аксиому:

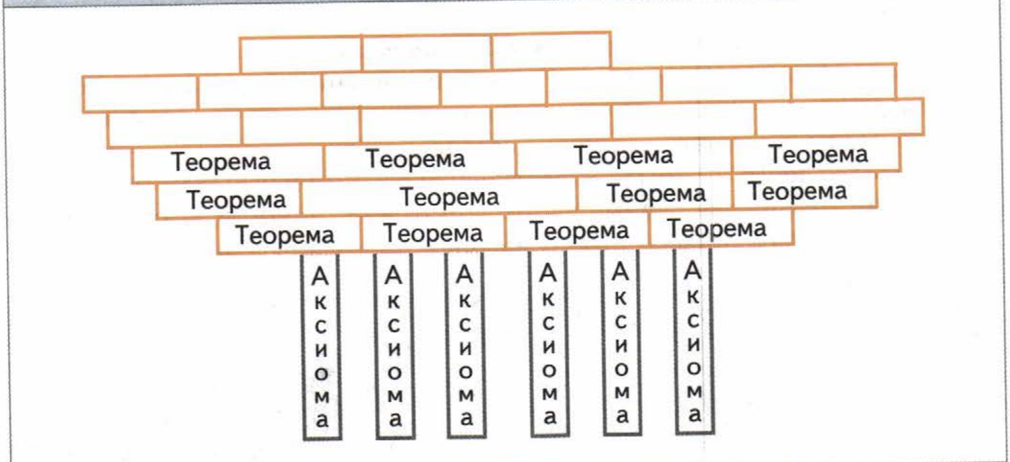
какова бы ни была прямая, существуют точки, принадлежащие этой прямой, и точки, не принадлежащие ей.

Аксиомы используют не только в математике. Нередко в обыденной жизни любое истинное утверждение называют аксиомой. Например, говорят: «После марта наступит апрель. Это аксиома».

Аксиомы возникают не только из практики или наблюдений.

Для любого гражданина России Конституция — это список аксиом. Поэтому аксиому можно рассматривать как закон или правило. Но законы (правила игры) принимают, т. е. они возникают в результате договорённости людей между собой. Следовательно, и аксиомы геометрии можно рассматривать как утверждённые правила, на основании которых геометры, как каменщики, строят здание науки (рис. 107).

Рис. 107



Тогда у вас может возникнуть вопрос: «Неужели на геометрию можно смотреть как на игру, например такую, как шахматы?» В какой-то степени да. Но при этом надо чётко понимать, что шахматные правила, а значит, и сама игра возникли благодаря человеческой фантазии. Вместе с тем геометрические правила (аксиомы) возникли из практики и наблюдений. Поэтому геометрия, в отличие от шахмат, используется очень широко.

Если вы изберёте профессию математика, то сможете познакомиться с совершенно иными геометриями, отличающимися от изучаемой в школе тем, что они строятся на других аксиомах.

Когда сделаны уроки

Из истории геометрии

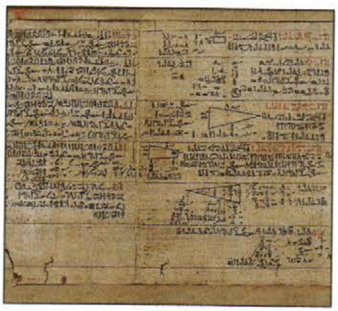
Когда и где возникли первые геометрические сведения? Специалисты на этот вопрос не отвечают однозначно. Одни считают, что первооткрывателями были египетские и вавилонские землемеры, жившие за 4000 лет до н. э., другие полагают, что геометрия зародилась в Древнем Египте 5000 лет назад.

Может показаться странным, но вопрос, когда возникла **наука геометрия**, не вызывает споров. Историки отвечают не с точностью до тысячелетий, а едины во мнении, указывая VI в. до н. э. Такое единодушие, на первый взгляд, может удивить: ведь до VI в. до н. э. народы Древнего мира накопили огромный объём геометрических знаний. Например, совершенно очевидно, что без геометрического опыта египтяне не подарили бы миру одно из семи чудес света – пирамиды. И всё-таки почему обилие геометрических фактов неравносильно существованию геометрической науки?

Геометрия стала называться наукой лишь тогда, когда её истины начали устанавливать путём доказательства.

Появление доказательной геометрии связано с именем первого из «семи мудрецов» – Фалеса Милетского (ок. 625–547 гг. до н. э.) – философа, учёного, купца и государственного деятеля.

Задолго до Фалеса было известно, что вертикальные углы равны, диаметр делит круг на две равные части. Никто в истинности этих фактов не сомневался. А Фалес доказал их, тем самым прославив себя.

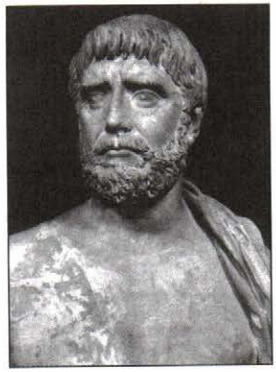


Древний папирус

Египетские пирамиды

В VI–III вв. до н. э. благодаря учёным Древней Греции, таким как Пифагор, Евдокс, Архит, Теэтет, Евклид (Эвклид), Архимед, геометрия из прикладной науки превратилась в математическую теорию.

Книгу, по которой учили геометрию более 2000 лет, без преувеличения можно назвать великой. Её название «Начала», автор – Евклид (ок. 365–300 гг. до н. э.). К сожалению, о самом Евклиде мало что известно. В таких случаях личность обрастает легендами, одна из которых очень поучительна. Царь Птолемей I спросил Евклида, существует ли более простой путь познания геометрии, чем изложенный в «Началах». Евклид ответил: «В геометрии нет царских дорог».



Фалес Милетский

А какой же путь в геометрию избрал Евклид в своих «Началах»? Аксиоматический. В фундаменте науки – список простейших фактов. Их называют постулатами (от латинского *postulatum* – «требование») и аксиомами. Затем на их основе путём логических рассуждений доказывают все другие свойства – теоремы. Постулатов у Евклида пять. Приведём первые четыре. О пятом постулате мы расскажем на странице 95.

Евклид

I постулат. **Требуется, чтобы от каждой точки ко всякой другой точке можно было провести прямую линию.**

II постулат. **И чтобы каждую прямую можно было неограниченно продолжить.**

III постулат. **И чтобы из любого центра можно было описать окружность любого радиуса.**

IV постулат. **И чтобы все прямые углы были равны.**

На протяжении многих веков с «Началами» Евклида по популярности могла сравниться разве что Библия. Так, ещё в конце XIX в. в ряде европейских стран геометрию преподавали по упрощённым изданиям «Начал». И сейчас геометрия, которую изучают в школе, во многом следует идеям Евклида.

«Начала» Евклида

Задание № 1 «Проверьте себя» в тестовой форме

1. Сколько прямых определяют три точки, не лежащие на одной прямой?

А) 2 Б) 4 В) 3 Г) 1

2. Сколько можно провести отрезков, содержащих две заданные точки?

А) 1 Б) 2 В) 3 Г) бесконечно много

3. Точка M является внутренней точкой отрезка PQ. Какое из следующих утверждений верно?

А) $PM + MQ = PQ$ В) $MQ = PQ + PM$

Б) $PQ = PM - MQ$ Г) $PM = PQ + MQ$

4. Точки A, B и C лежат на одной прямой, причём $BC = 8$ см, $AB - AC = 8$ см. Какое из следующих утверждений верно?

А) точка A – середина отрезка BC

Б) точка B – середина отрезка AC

В) точка C – середина отрезка AB

Г) точки A и B совпадают

5. Длина отрезка AB равна 12 см. Сколько существует на прямой AB точек, для которых сумма расстояний до концов отрезка AB равна 14 см?

А) бесконечно много Б) 1 В) 2 Г) ни одной

6. Длина отрезка AB равна 12 см. Сколько существует на прямой AB точек, для которых сумма расстояний до концов отрезка AB равна 12 см?

А) ни одной Б) 2 В) бесконечно много Г) 1

7. Два луча являются дополнительными, если

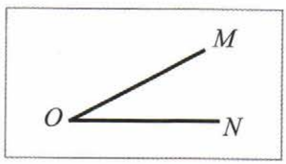
А) они имеют общее начало

Б) их объединением является прямая и они имеют общее начало

В) они принадлежат одной прямой

Г) их объединением является прямая

8. Какое обозначение угла, изображённого на рисунке, является неверным?



А) $\angle O$ В) $\angle MON$

Б) $\angle OMN$ Г) $\angle NOM$

9. Какое из следующих утверждений неверно?

А) смежные углы имеют общую вершину

Б) смежные углы имеют общую сторону

В) всегда один из смежных углов острый, а другой – тупой

Г) если углы AOC и COB – смежные, то лучи OA и OB – дополнительные

10. Какое из следующих утверждений неверно?

А) вертикальные углы равны

Б) если углы равны, то они вертикальны

В) вертикальные углы имеют общую вершину

Г) стороны вертикальных углов образуют две пары дополнительных лучей

11. Какое из следующих утверждений верно?

А) перпендикулярные отрезки всегда имеют общую точку

Б) перпендикулярные лучи всегда имеют общую точку

В) перпендикулярные прямые всегда имеют общую точку

Г) перпендикулярные луч и отрезок всегда имеют общую точку

Итоги главы 1

Основное свойство прямой

Через любые две точки можно провести прямую, и притом только одну.

Пересекающиеся прямые

Две прямые, имеющие общую точку, называют пересекающимися.

Теорема о двух пересекающихся прямых

Любые две пересекающиеся прямые имеют только одну общую точку.

Равные отрезки

Два отрезка называют равными, если их можно совместить наложением.

Основное свойство длины отрезка

Если точка C является внутренней точкой отрезка AB, то отрезок AB равен сумме отрезков AC и CB, т. е. $AB = AC + CB$.

Расстояние между точками

Расстоянием между точками A и B называют длину отрезка AB.

Дополнительные лучи

Два луча, имеющие общее начало и лежащие на одной прямой, называют дополнительными.

Развёрнутый угол

Угол, стороны которого являются дополнительными лучами, называют развёрнутым.

Равные углы

Два угла называют равными, если их можно совместить наложением.

Биссектриса угла

Биссектрисой угла называют луч с началом в вершине угла, делящий этот угол на два равных угла.

Острый, прямой, тупой углы

Угол, градусная мера которого меньше $90°$, называют острым.

Угол, градусная мера которого равна $90°$, называют прямым.

Угол, градусная мера которого больше $90°$, но меньше $180°$, называют тупым.

Основное свойство величины угла

Если луч OC делит угол AOB на два угла AOC и COB, то $\angle AOB = \angle AOC + \angle COB$.

Смежные углы

Два угла называют смежными, если у них одна сторона общая, а две другие являются дополнительными лучами.

Свойство смежных углов

Сумма смежных углов равна $180°$.

Вертикальные углы

Два угла, отличных от развёрнутого, называют вертикальными, если стороны одного угла являются дополнительными лучами сторон другого.

Свойство вертикальных углов

Вертикальные углы равны.

Перпендикулярные прямые

Две прямые называют перпендикулярными, если при их пересечении образовался прямой угол.

Теорема о единственности прямой, перпендикулярной данной

Через каждую точку прямой проходит только одна прямая, перпендикулярная данной.

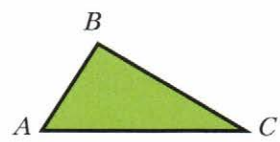
Глава 2. Треугольники

Как, не накладывая треугольники один на другой, узнать, равны ли они? Какими особыми свойствами обладают равнобедренный и равносторонний треугольники? Как «устроена» теорема? На эти и многие другие вопросы вы найдёте ответы в данной главе.

§ 7. Равные треугольники. Высота, медиана, биссектриса треугольника

Рассмотрим три точки A, B, C, не лежащие на одной прямой. Соединим их отрезками AB, BC, CA. Полученная фигура ограничивает часть плоскости, выделенную на рисунке 108 зелёным цветом. Эту часть плоскости вместе с отрезками AB, BC и CA называют **треугольником**.

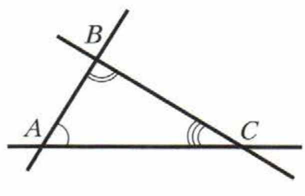
Рис. 108



Точки A, B, C называют **вершинами**, а отрезки AB, BC, CA – **сторонами** треугольника.

Треугольник называют и обозначают по его вершинам. Треугольник, изображённый на рисунке 108, обозначают так: ΔABC, или ΔBCA, или ΔACB (читают: «треугольник ABC», «треугольник BCA», «треугольник ACB») и т. д.

Рис. 109



Углы BAC, ABC, BCA (рис. 109) называют **углами треугольника** ABC.

В треугольнике ABC (рис. 109), например, угол B называют *углом, противолежащим стороне* AC, углы A и C – *углами, прилежащими к стороне* AC, сторону AC – *стороной, противолежащей углу* B, стороны AB и AC – *сторонами, прилежащими к углу* A.

Определение

Периметром треугольника называют сумму длин всех его сторон.

Периметр обозначают буквой P. Например, для периметра треугольника MNK используют обозначение P_{MNK}.

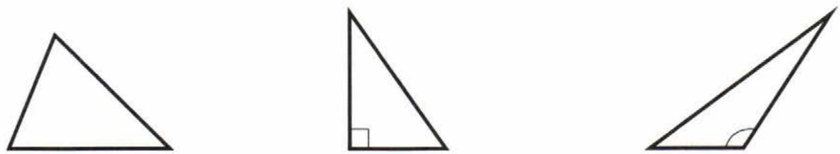
Определения

Треугольник называют остроугольным, если все его углы острые (рис. 110, *а*).

Треугольник называют прямоугольным, если один из его углов прямой (рис. 110, *б*).

Треугольник называют тупоугольным, если один из его углов тупой (рис. 110, *в*).

Рис. 110



Остроугольный треугольник

а

Прямоугольный треугольник

б

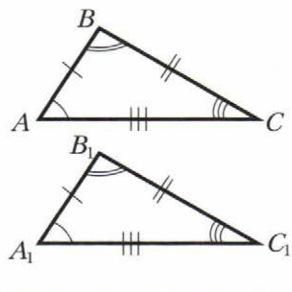
Тупоугольный треугольник

в

Определение

Два треугольника называют равными, если их можно совместить наложением.

Рис. 111



На рисунке 111 изображены равные треугольники ABC и $A_1B_1C_1$. Записывают: $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$. Эти треугольники можно совместить так, что вершины A и A_1, B и B_1, C и C_1 совпадут. Тогда можно записать: $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$, $\angle C = \angle C_1$, $AB = A_1B_1$, $BC = B_1C_1$, $CA = C_1A_1$.

Те стороны и те углы, которые совмещаются при наложении треугольников, называют **соответственными сторонами** и **соответственными углами**. Так, например, на рисунке 111 стороны AC и A_1C_1, углы A и A_1 – соответственные.

Обычно на рисунках равные стороны отмечают одинаковым количеством чёрточек, а равные углы – одинаковым количеством дуг (рис. 111).

Заметим, что в *равных треугольниках против соответственных углов лежат соответственные стороны*, и наоборот: *против соответственных сторон лежат соответственные углы*.

Основное свойство равенства треугольников

Для данного треугольника ABC и луча A_1M существует треугольник $A_1B_1C_1$, равный треугольнику ABC, такой, что $AB = A_1B_1$, $BC = B_1C_1$, $AC = A_1C_1$ и сторона A_1B_1 принадлежит лучу A_1M, а вершина C_1 лежит в заданной полуплоскости относительно прямой A_1M (рис. 112).

Рис. 112

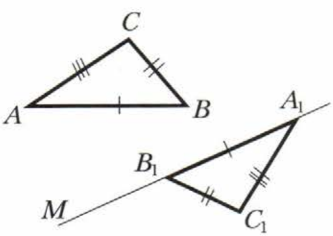


Рис. 113

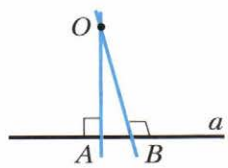
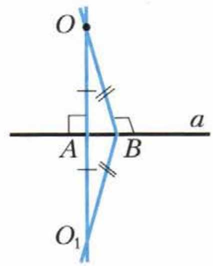


Рис. 114



Теорема 7.1

Через точку, не принадлежащую данной прямой, проходит только одна прямая, перпендикулярная данной.

Доказательство

Рассмотрим прямую a и не принадлежащую ей точку O. Предположим, что через точку O проходят две прямые OA и OB, перпендикулярные прямой a (рис. 113).

В силу основного свойства равенства треугольников существует треугольник O_1AB, равный треугольнику OAB (рис. 114). Тогда $\angle OAB = \angle O_1AB = 90°$. Отсюда $\angle OAO_1 = 180°$, а значит, точки O, A, O_1 лежат на одной прямой.

Аналогично доказывают, что точки O, B, O_1 также лежат на одной прямой. Но тогда прямые OA и OB имеют две точки пересечения: O и O_1. А это противоречит теореме 1.1. Следовательно, наше предположение неверно. Тогда через точку O проходит одна прямая, перпендикулярная прямой a. ◄

Возможно, вы заметили, что определения равных отрезков, равных углов и равных треугольников очень похожи. Поэтому целесообразно принять следующее определение равных фигур.

Определение

Две фигуры называют равными, если их можно совместить наложением.

На рисунке 115 изображены равные фигуры Φ_1 и Φ_2. Пишут: $\Phi_1 = \Phi_2$. Любые две прямые (два луча, две точки) равны.

Определение

Перпендикуляр, опущенный из вершины треугольника на прямую, содержащую противолежащую сторону, называют высотой треугольника.

На рисунке 116 отрезки BB_1 и CC_1 – высоты треугольника ABC.

Определение

Отрезок, соединяющий вершину треугольника с серединой противолежащей стороны, называют медианой треугольника.

На рисунке 117 отрезок AM – медиана треугольника ABC.

Рис. 115

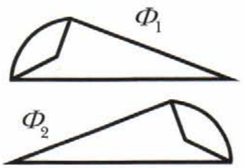


Рис. 116

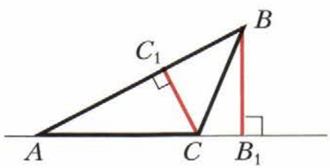
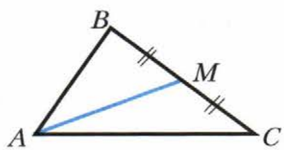


Рис. 117

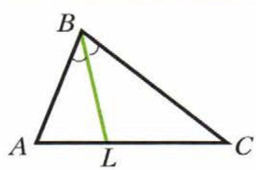


Определение

Отрезок биссектрисы угла треугольника, соединяющий вершину треугольника с точкой противолежащей стороны, называют биссектрисой треугольника.

На рисунке 118 отрезок BL – биссектриса треугольника ABC.

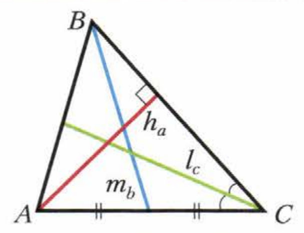
Рис. 118



Каждый треугольник имеет три высоты, три медианы и три биссектрисы.

Часто длины сторон треугольника, противолежащих углам A, B, C, обозначают соответственно a, b, c. Длины высот обозначают h_a, h_b, h_c, медиан – m_a, m_b, m_c, биссектрис – l_a, l_b, l_c. Индекс показывает, к какой стороне проведён отрезок (рис. 119).

Рис. 119



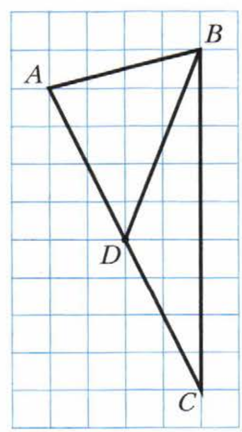
1. Как называют и обозначают треугольник?
2. Что называют периметром треугольника?
3. Какие существуют виды треугольников в зависимости от вида их углов?
4. Какой треугольник называют прямоугольным? Тупоугольным? Остроугольным?
5. Какие два треугольника называют равными?
6. Как называют пары сторон и пары углов равных треугольников, которые совмещаются при наложении?
7. Какие две фигуры называют равными?
8. Что называют высотой треугольника?
9. Что называют медианой треугольника?
10. Что называют биссектрисой треугольника?
11. Сколько у каждого треугольника высот? Медиан? Биссектрис?

Практические задания

132. Начертите треугольник:
1) остроугольный;
2) прямоугольный;
3) тупоугольный.
Проведите из каждой вершины треугольника высоту.

133. Перерисуйте в тетрадь рисунок 120, проведите высоту, общую для трёх изображённых треугольников. У какого из них эта высота расположена вне треугольника?

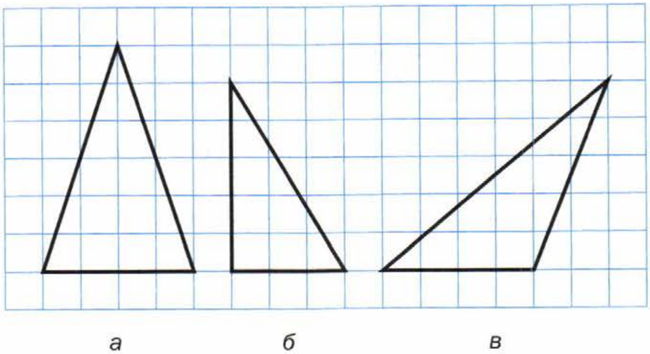
Рис. 120



134. Перерисуйте в тетрадь треугольники, изображённые на рисунке 121, проведите в каждом из них три высоты.

135. Начертите произвольный треугольник и проведите все его медианы.

Рис. 121



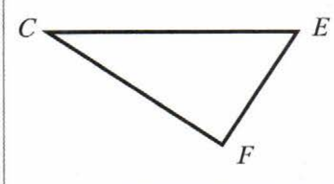
136. Начертите произвольный треугольник и проведите все его биссектрисы.

Упражнения

137. Начертите произвольный треугольник, обозначьте его вершины буквами M, K и E. Укажите:

1) сторону, противолежащую углу M;
2) угол, противолежащий стороне MK;
3) стороны, прилежащие к углу K;
4) углы, прилежащие к стороне KE.

Рис. 122



138. Назовите стороны, вершины, углы треугольника CEF (рис. 122). Укажите:

1) угол, противолежащий стороне CF;
2) углы, прилежащие к стороне CE;
3) сторону, противолежащую углу E;
4) стороны, прилежащие к углу F.

139. Одна из сторон треугольника в 5 раз меньше второй и на 25 см меньше третьей. Найдите стороны треугольника, если его периметр равен 74 см.

140. Стороны треугольника относятся как $5 : 7 : 11$, а сумма наибольшей и наименьшей сторон равна 80 см. Вычислите периметр треугольника.

141. Периметр треугольника равен 48 см, а его стороны относятся как $7 : 9 : 8$. Найдите стороны треугольника.

142. Треугольники APK и MCE равны, углы A и C соответственные, $PK = 10$ см. Найдите сторону ME.

143. Треугольники ABC и DEF равны, стороны AB и DE, BC и DF соответственные, $\angle B = 32°$. Найдите $\angle D$.

144. Треугольники ABC и KTM равны, углы A и M, B и K соответственные, $\angle C = 40°$, $MK = 5$ см. Найдите угол T и сторону AB.

145. Верно ли утверждение:

1) если треугольники равны, то их периметры также равны;

2) если периметры двух треугольников равны, то и сами треугольники равны?

146. Какие из элементов треугольника – биссектриса, медиана, высота – всегда принадлежат треугольнику?

147. Какой из элементов треугольника – биссектриса, медиана, высота – может совпадать с его стороной? Укажите вид треугольника, для которого это возможно.

148. 1) Может ли одна высота треугольника принадлежать ему, а две другие – нет?

2) Может ли только одна высота треугольника совпадать с его стороной?

3) В каком треугольнике три высоты пересекаются в его вершине?

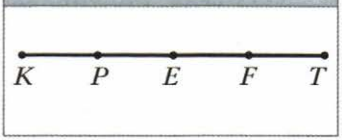
149. Медиана BD треугольника ABC разбивает его на два треугольника, периметры которых равны 32 см и 36 см. Найдите периметр треугольника ABC, если $BD = 10$ см.

150. Медиана треугольника, периметр которого равен 60 см, разбивает его на два треугольника, периметры которых равны 36 см и 50 см. Чему равна длина этой медианы?

Упражнения для повторения

151. На рисунке 123 $KP = PE = EF = FT = 1$ см. Какие равные отрезки есть ещё на этом рисунке? Найдите их длины.

Рис. 123

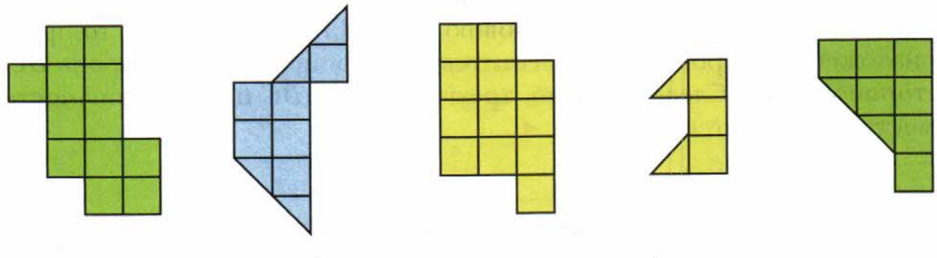


152. Луч BD разбивает угол ABC, равный 72°, на два угла ABD и CBD так, что $\angle ABD = 5\angle CBD$. Луч BK проходит так, что луч BA является биссектрисой угла DBK. Определите градусную меру и вид угла DBK.

Наблюдайте, рисуйте, конструируйте, фантазируйте

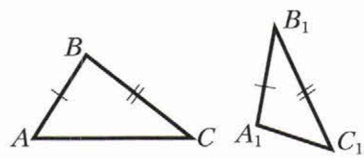
153. Разрежьте каждую из фигур, изображённых на рисунке 124, на две равные фигуры (разрезáть не обязательно по линиям сетки).

Рис. 124



§ 8. Первый и второй признаки равенства треугольников

Рис. 125



Если для треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ выполняются шесть условий: $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$, $\angle C = \angle C_1$, $AB = A_1B_1$, $BC = B_1C_1$, $CA = C_1A_1$, то очевидно, что эти треугольники совпадут при наложении. Значит, они равны.

Попробуем уменьшить количество условий. Например, оставим лишь два равенства: $AB = A_1B_1$ и $BC = B_1C_1$. В этом случае треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ могут оказаться неравными (рис. 125).

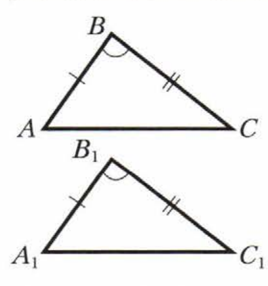
Как же сократить список требований до минимума, но при этом сохранить равенство треугольников? На этот вопрос отвечают теоремы, которые называют **признаками равенства треугольников**.

Теорема 8.1

(первый признак равенства треугольников: по двум сторонам и углу между ними)

Если две стороны и угол между ними одного треугольника равны соответственно двум сторонам и углу между ними другого треугольника, то такие треугольники равны.

Рис. 126



Доказательство

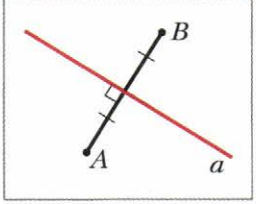
Рассмотрим треугольники ABC и $A_1B_1C_1$, у которых $AB = A_1B_1$, $BC = B_1C_1$, $\angle B = \angle B_1$ (рис. 126). Докажем, что $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$.

Наложим ΔABC на $\Delta A_1B_1C_1$ так, чтобы луч BA совместился с лучом B_1A_1, а луч BC совместился с лучом B_1C_1. Это можно сделать, так как по условию $\angle B = \angle B_1$. Поскольку по условию $BA = B_1A_1$ и $BC = B_1C_1$, то при таком наложении сторона BA совместится со стороной B_1A_1, а сторона BC — со стороной B_1C_1. Следовательно, треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ полностью совместятся, значит, они равны. ◄

Определение

Прямую, перпендикулярную отрезку и проходящую через его середину, называют серединным перпендикуляром отрезка.

Рис. 127



На рисунке 127 прямая a — серединный перпендикуляр отрезка AB, а точки A и B равноудалены от прямой a.

Теорема 8.2

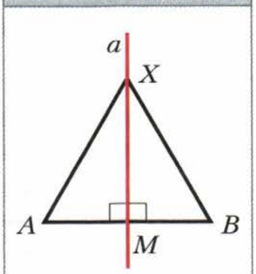
Каждая точка серединного перпендикуляра отрезка равноудалена от концов этого отрезка.

Доказательство

Пусть X — произвольная точка серединного перпендикуляра a отрезка AB, точка M — середина отрезка AB. Надо доказать, что $XA = XB$.

Если точка X совпадает с точкой M (а это возможно, так как X — произвольная точка прямой a), то $XA = XB$.

Рис. 128



Если точки X и M не совпадают, то рассмотрим треугольники AXM и BXM (рис. 128). В этих треугольниках $AM = MB$, так как точка M — середина отрезка AB, сторона XM — общая, $\angle AMX = \angle BMX = 90°$. Следовательно, треугольники AXM и BXM равны по первому признаку равенства треугольников. Значит, отрезки XA и XB равны как соответственные стороны равных треугольников. ◄

Теорема 8.3

(второй признак равенства треугольников: по стороне и двум прилежащим к ней углам)

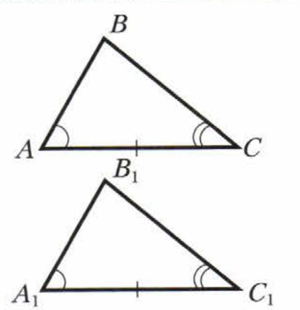
Если сторона и два прилежащих к ней угла одного треугольника равны соответственно стороне и двум приле-

жащим к ней углам другого треугольника, то такие треугольники равны.

Доказательство

Рассмотрим треугольники ABC и $A_1B_1C_1$, у которых $AC = A_1C_1$, $\angle A = \angle A_1$, $\angle C = \angle C_1$ (рис. 129). Докажем, что $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$.

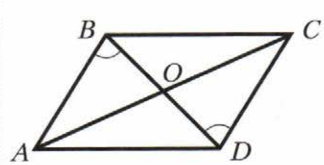
Рис. 129



Наложим треугольник ABC на треугольник A_1B_1C так, чтобы точка A совместилась с точкой A_1, отрезок AC – с отрезком A_1C_1 (это возможно, так как $AC = A_1C_1$) и точки B и B_1 лежали в одной полуплоскости относительно прямой A_1C_1. Поскольку $\angle A = \angle A_1$ и $\angle C = \angle C_1$, то луч AB совместится с лучом A_1B_1, а луч CB – с лучом C_1B_1. Тогда точка B – общая точка лучей AB и CB – совместится с точкой B_1 – общей точкой лучей A_1B_1 и C_1B_1. Значит, треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ полностью совместятся, следовательно, они равны. ◄

<u>**Задача.**</u> На рисунке 130 точка O – середина отрезка BD, $\angle ABO = \angle CDO$. Докажите, что $BC = AD$.

Рис. 130



Решение. Рассмотрим ΔAOB и ΔCOD. Так как точка O – середина отрезка BD, то $BO = OD$. По условию $\angle ABO = \angle CDO$. Углы AOB и COD равны как вертикальные. Следовательно, $\Delta AOB = \Delta COD$ по стороне и двум прилежащим углам.

Отсюда $AB = CD$, $\angle BAC = \angle DCA$. Заметим, что AC – общая сторона треугольников ABC и ADC. Следовательно, $\Delta ABC = \Delta ACD$ по двум сторонам и углу между ними. Тогда $BC = AD$. ◄

?

1. Сформулируйте первый признак равенства треугольников.
2. Какую прямую называют серединным перпендикуляром отрезка?
3. Каким свойством обладают точки серединного перпендикуляра?
4. Сформулируйте второй признак равенства треугольников.

<u>Практические задания</u>

154. С помощью линейки и транспортира постройте треугольник, две стороны которого равны 3 и 6 см, а угол между ними – 40°.

155. С помощью линейки и транспортира постройте треугольник, две стороны которого равны 3 см и 4 см, а угол между ними – 90°. Укажите вид этого треугольника.

156. С помощью линейки и транспортира постройте треугольник, одна сторона которого равна 3 см, а углы, прилежащие к этой стороне, – 100° и 20°. Укажите вид этого треугольника.

157. С помощью линейки и транспортира постройте треугольник, одна сторона которого равна 6 см, а углы, прилежащие к этой стороне, – 90° и 45°.

158. Перерисуйте в тетрадь рисунок 131. С помощью угольника и линейки найдите на прямой l точку, равноудалённую от концов отрезка AB.

159. Перерисуйте в тетрадь рисунок 132. С помощью угольника и линейки найдите точку, равноудалённую от точек A и B, а также точек C и D.

Рис. 131

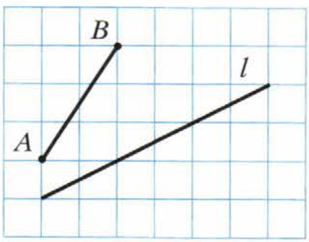
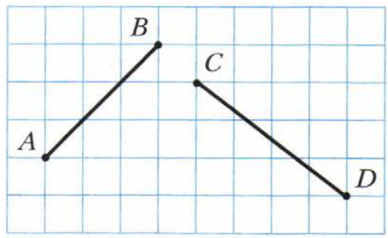


Рис. 132



Упражнения

160. На рисунке 133 $AC = DC$, $BC = EC$. Докажите, что $\Delta ABC = \Delta DEC$.

161. На рисунке 134 $AB = AD$, $\angle BAC = \angle DAC$. Докажите, что $\Delta ABC = \Delta ADC$.

Рис. 133

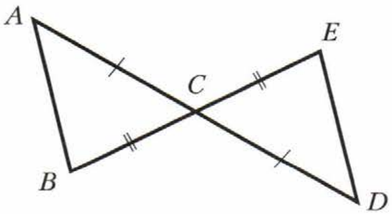
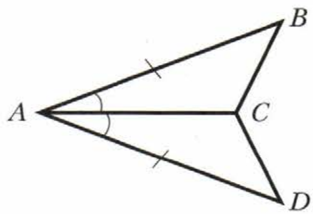


Рис. 134



162. На рисунке 135 $AB = CD$, $\angle 1 = \angle 2$, $AD = 7$ см, $\angle C = 34°$. Найдите отрезок BC и угол A.

163. На рисунке 136 $AO = OD$, $BO = OC$. Найдите сторону CD и угол OCD треугольника OCD, если $AB = 8$ см, $\angle OBA = 43°$.

164. Дано: $OA = OC$, $OB = OD$ (рис. 137). Докажите, что $\angle OAD = \angle OCB$.

Рис. 135

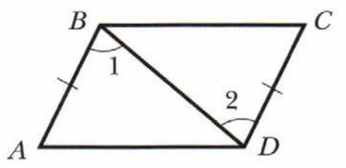


Рис. 136

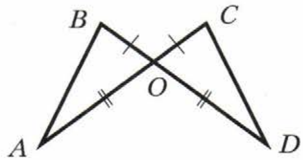
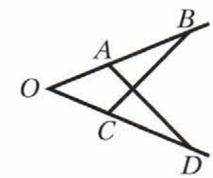


Рис. 137



165. Дано: $AD \perp BC$, $BD = CD$ (рис. 138). Докажите, что $AB = AC$.

166. Из точек A и B, лежащих в одной полуплоскости относительно прямой a и на одинаковом расстоянии от неё, опущены на эту прямую перпендикуляры AC и BD. Найдите угол ACB, если $\angle ADC = 25°$.

167. Отрезки AD и BC пересекаются в точке O и делятся этой точкой пополам. Найдите угол ACD, если $\angle ABC = 64°$, $\angle ACO = 56°$.

168. На рисунке 139 $AB \perp BD$, $CD \perp BD$, точка O – середина отрезка BD. Докажите, что $\Delta ABO = \Delta CDO$.

Рис. 138

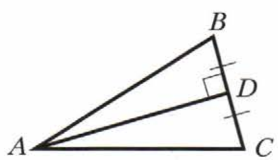
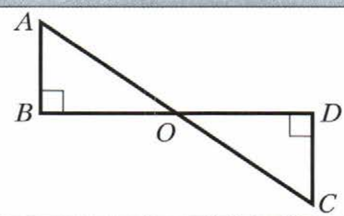


Рис. 139



169. На рисунке 140 $\angle 1 = \angle 2$, $\angle 3 = \angle 4$, $AB = 8$ см, $BC = 6$ см. Найдите стороны AD и CD треугольника ADC.

170. На рисунке 141 $\angle ABC = \angle DEF$, $BO = OE$. Докажите, что $\Delta BCO = \Delta EFO$.

Рис. 140

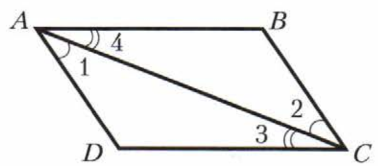
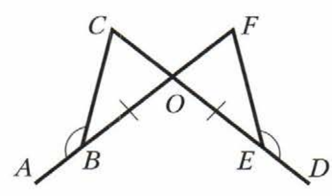


Рис. 141



171. На рисунке 142 $\angle BAO = \angle DCO$, $\angle BAC = \angle DCA$. Докажите, что $\Delta ABC = \Delta ACD$.

172. На сторонах угла с вершиной в точке B отмечены точки A и C, а на его биссектрисе – точка D так, что $\angle ADB = \angle CDB$. Докажите, что $AB = BC$.

173. Через точку M, принадлежащую биссектрисе угла с вершиной в точке O, провели прямую, перпендикулярную биссектрисе. Эта прямая пересекает стороны данного угла в точках A и B. Докажите, что $AM = MB$.

174. На рисунке 143 $\Delta ABC = \Delta ADC$. Докажите, что $\Delta ABK = \Delta ADK$.

Рис. 142

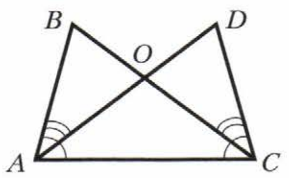
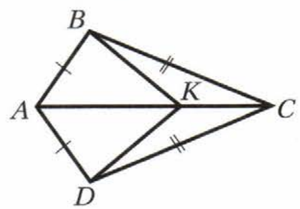


Рис. 143



175. На рисунке 144 $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$, $\angle DBC = \angle D_1B_1C_1$. Докажите, что $\Delta DBC = \Delta D_1B_1C_1$.

Рис. 144

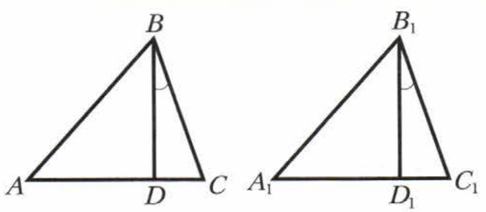
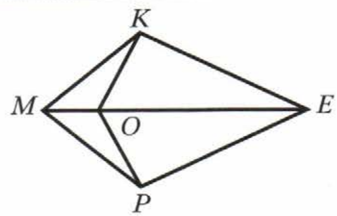


Рис. 145

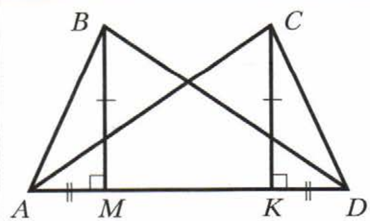


176. На рисунке 145 $\Delta MKO = \Delta MPO$. Докажите, что $\Delta KOE = \Delta POE$.

177. На рисунке 146 $BM \perp AD$, $CK \perp AD$, $BM = CK$, $AM = KD$. Докажите, что $\Delta ABD = \Delta ADC$.

178. Докажите, что в равных треугольниках биссектрисы соответственных углов равны.

Рис. 146



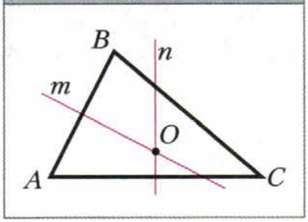
179. Докажите, что в равных треугольниках медианы, проведённые к соответственным сторонам, равны.

180. На продолжении медианы AM треугольника ABC за точку M отложен отрезок MK, равный AM. Найдите расстояние от точки K до вершины C, если $AB = 6$ см.

181. Отрезки AB и CD пересекаются в точке O и делятся точкой пересечения пополам. Докажите, что $\Delta ABC = \Delta BAD$.

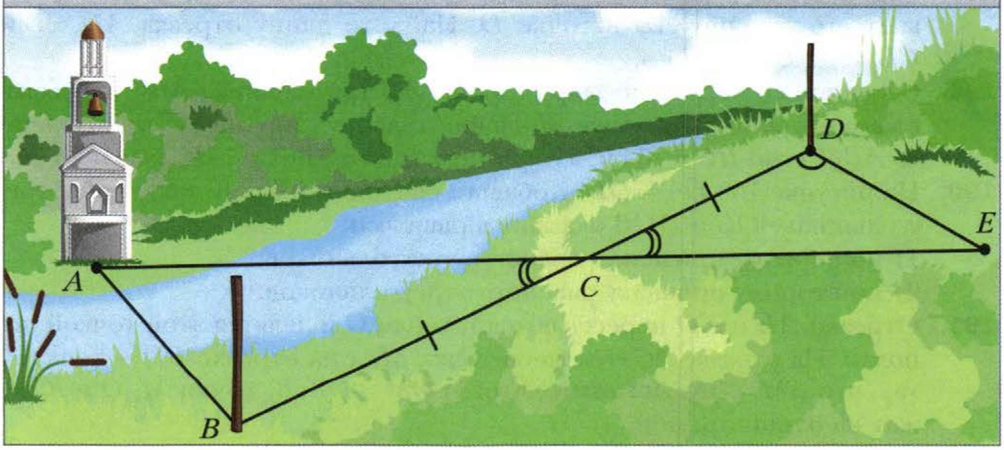
182. На рисунке 147 прямые m и n – серединные перпендикуляры сторон AB и AC треугольника ABC. Докажите, что точка O равноудалена от всех вершин данного треугольника.

Рис. 147



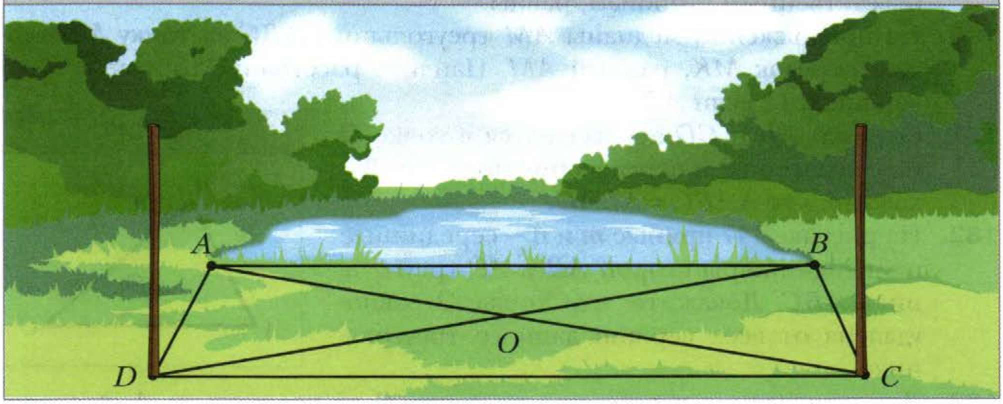
183. Для нахождения расстояния от точки B до колокольни A, расположенной на другом берегу реки (рис. 148), с помощью вешек, рулетки и астролябии отметили на местности точки C, D и E так, что B, C и D лежат на одной прямой, причём точка C является серединой отрезка BD, и наметили прямую AE, проходящую через точку C, причём $\angle ABC = \angle CDE$. Потом, измерив одну из сторон треугольника CDE, определили расстояние от B до A. Какую сторону измерили? Ответ обоснуйте.

Рис. 148



184. Для определения ширины озера (рис. 149) на его берегу отметили точки A и B, а потом ещё точки C, D и O так, что точка O – общая середина отрезков AC и BD. Как можно определить ширину озера? Ответ обоснуйте.

Рис. 149



185. Докажите равенство двух треугольников по стороне, медиане, проведённой к этой стороне, и углом между этой стороной и медианой.

186. Докажите равенство двух треугольников по стороне, прилежащему к ней углу и биссектрисе этого угла.

187. Докажите равенство двух треугольников по биссектрисе, углу, из вершины которого проведена эта биссектриса, и углу, образованному биссектрисой со стороной, к которой она проведена.

188. Серединный перпендикуляр стороны BC треугольника ABC пересекает его сторону AB в точке D. Найдите длину отрезка AD, если $CD = 4$ см, $AB = 7$ см.

189. Серединный перпендикуляр стороны AB треугольника ABC пересекает его сторону BC в точке M. Найдите длину стороны AC треугольника ABC, если $BC = 16$ см, а периметр треугольника AMC равен 26 см.

190. На рисунке 150 $OA = OD$. Добавьте ещё одно условие так, чтобы треугольники AOC и DOB оказались равными:

1) по первому признаку равенства треугольников;
2) по второму признаку равенства треугольников.

191. Отрезки AB и CD пересекаются в точке O и делятся этой точкой пополам. На отрезке AC отмечена точка M, а на отрезке BD – точка K так, что $AM = BK$. Докажите, что: 1) $OM = OK$; 2) точки M, O и K лежат на одной прямой.

192. На одной стороне угла с вершиной в точке O (рис. 151) отмечены точки A и B, а на другой – точки C и D так, что $OA = OC$, $AB = CD$. Докажите, что луч OM является биссектрисой угла BOD, где M – точка пересечения отрезков AD и BC.

Упражнения для повторения

193. Истинно ли утверждение: если через каждые две из трёх данных точек провести прямую, то получим три прямые?

194. Лучи OD и OF – биссектрисы смежных углов AOB и BOC соответственно, $\angle AOD : \angle FOC = 2 : 7$. Найдите $\angle AOD$ и $\angle FOC$.

Наблюдайте, рисуйте, конструируйте, фантазируйте

195. Разделите каждую из фигур, изображённых на рисунке 152, по линиям сетки на четыре равные части так, чтобы в каждой части был ровно один кружок.

Рис. 150

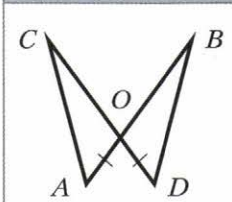


Рис. 151

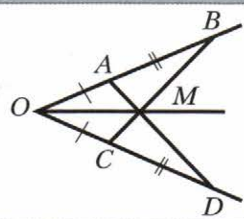
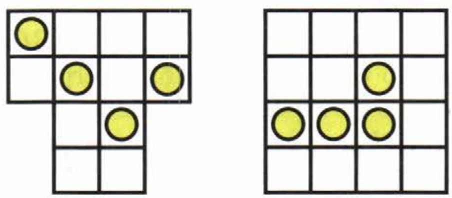


Рис. 152



§ 9. Равнобедренный треугольник и его свойства

Определение

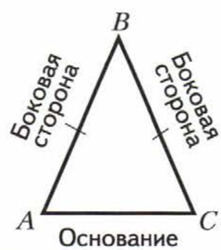
Треугольник, у которого две стороны равны, называют равнобедренным.

На рисунке 153 изображён равнобедренный треугольник ABC, у которого $AB = BC$.

Равные стороны треугольника называют **боковыми** сторонами, а третью сторону – **основанием** равнобедренного треугольника.

Вершиной равнобедренного треугольника называют общую точку его боковых сторон (точка B на рис. 153). При этом угол B называют **углом при вершине**, а углы A и C – **углами при основании** равнобедренного треугольника.

Рис. 153



Определение

Треугольник, у которого все стороны равны, называют равносторонним.

На рисунке 154 изображён равносторонний треугольник ABC. Равносторонний треугольник – частный случай равнобедренного треугольника.

Теорема 9.1

В равнобедренном треугольнике: 1) углы при основании равны; 2) биссектриса треугольника, проведённая из угла при вершине, является медианой и высотой.

Доказательство

Рассмотрим равнобедренный треугольник ABC, у которого $AB = BC$, отрезок BL – его биссектриса (рис. 155). Требуется доказать, что $\angle A = \angle C$, $AL = LC$, $BL \perp AC$.

В треугольниках ABL и CBL сторона BL – общая, $\angle ABL = \angle CBL$, так как по условию BL – биссектриса угла ABC, стороны AB и BC равны как боковые стороны равнобедренного треугольника. Следовательно, $\Delta ABL = \Delta CBL$ по первому признаку равенства треугольников. Отсюда можно сделать такие выводы: 1) $\angle A = \angle C$; 2) $AL = LC$; 3) $\angle ALB = \angle CLB$.

Так как отрезки AL и LC равны, то BL – медиана треугольника ABC.

Углы ALB и CLB смежные, следовательно, $\angle ALB + \angle CLB = 180°$. Учитывая, что $\angle ALB = \angle CLB$, получаем: $\angle ALB = \angle CLB = 90°$. Значит, отрезок BL – высота треугольника ABC. ◄

Рис. 154

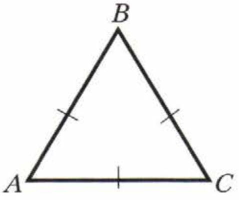


Рис. 155

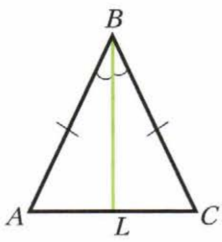
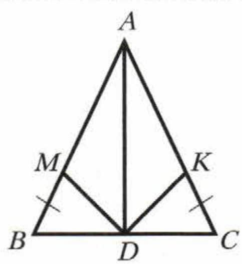


Рис. 156



Из теоремы 9.1 следует, что:

1) ***в треугольнике против равных сторон лежат равные углы;***

2) ***в равнобедренном треугольнике биссектриса, высота и медиана, проведённые из его вершины, совпадают;***

3) ***в равностороннем треугольнике все углы равны;***

4) ***в равностороннем треугольнике биссектриса, высота и медиана, проведённые из одной вершины, совпадают.***

Определение

Если в треугольнике длины всех сторон различны, то такой треугольник называют разносторонним.

Задача. Отрезок AD – медиана равнобедренного треугольника ABC, проведённая к основанию. На сторонах AB и AC отмечены соответственно точки M и K так, что $BM = CK$. Докажите равенство треугольников AMD и AKD.

Решение. Точка M принадлежит отрезку AB, а точка K – отрезку AC, следовательно, $AB = AM + BM$, $AC = AK + CK$ (рис. 156).

Так как $AB = AC$ и $BM = CK$, то $AM = AK$.

Углы BAD и CAD равны, поскольку медиана равнобедренного треугольника, проведённая к основанию, является его биссектрисой.

Заметим, что AD – общая сторона треугольников AMD и AKD.

Следовательно, $\Delta AMD = \Delta AKD$ по двум сторонам и углу между ними. ◄

1. Какие существуют виды треугольников в зависимости от количества равных сторон?
2. Какой треугольник называют равнобедренным? Равносторонним? Разносторонним?
3. Какие стороны равнобедренного треугольника называют боковыми?
4. Какую сторону равнобедренного треугольника называют основанием?
5. Сформулируйте свойство углов равнобедренного треугольника.
6. Сформулируйте свойство биссектрисы равнобедренного треугольника, проведённой к основанию.
7. Каким свойством обладают углы треугольника, лежащие против его равных сторон?
8. Сформулируйте свойство углов равностороннего треугольника.
9. Каким свойством обладают биссектриса, высота и медиана равностороннего треугольника, проведённые из одной вершины?

Практические задания

196. Начертите:

1) разносторонний остроугольный треугольник;
2) равнобедренный прямоугольный треугольник;
3) равнобедренный тупоугольный треугольник.

197. Начертите:

1) разносторонний прямоугольный треугольник;

2) разносторонний тупоугольный треугольник.

198. Начертите равнобедренный треугольник с боковой стороной, равной 3 см, так, чтобы его угол при вершине был: 1) острым; 2) прямым; 3) тупым. В построенных треугольниках проведите высоты к боковым сторонам.

Упражнения

199. 1) Найдите периметр равнобедренного треугольника, основание которого равно 13 см, а боковая сторона – 8 см.

2) Периметр равнобедренного треугольника равен 39 см, а основание – 15 см. Найдите боковые стороны треугольника.

200. Периметр равнобедренного треугольника равен 28 см, а боковая сторона – 10 см. Найдите основание треугольника.

201. Найдите стороны равнобедренного треугольника, периметр которого равен 32 см, а основание на 5 см больше боковой стороны.

202. Найдите стороны равнобедренного треугольника, периметр которого равен 54 см, а основание в 4 раза меньше боковой стороны.

203. В равнобедренном треугольнике ABC сторона AC – основание, $\angle BCA = 40^\circ$, $\angle ABC = 100^\circ$, BD – медиана. Найдите углы треугольника ABD.

204. На рисунке 157 $AB = BC$, BD – медиана треугольника ABC, $\angle ABD = 53^\circ$. Найдите $\angle ABC$ и $\angle ADE$.

205. На рисунке 158 $MK = KE$, $OE = 6$ см, $\angle MKE = 48^\circ$, $\angle POE = 90^\circ$. Найдите сторону ME и угол MKO.

206. На рисунке 159 $AB = BC$, $\angle 1 = 140^\circ$. Найдите $\angle 2$.

Рис. 157

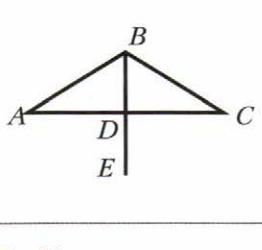


Рис. 158

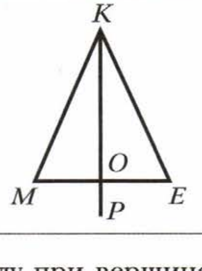
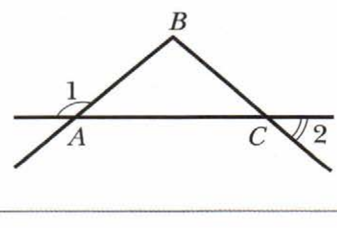


Рис. 159



207. Угол, вертикальный углу при вершине равнобедренного треугольника, равен 68°. Найдите угол между боковой стороной треугольника и медианой, проведённой к основанию.

208. Угол, смежный с углом при вершине равнобедренного треугольника, равен 76°. Найдите угол между боковой стороной треугольника и высотой, опущенной на основание.

209. На рисунке 160 $AB = BC$, $DC = DE$. Докажите, что $\angle A = \angle E$.

210. Прямая пересекает стороны угла A в точках B и C так, что $AB = AC$ (рис. 161). Докажите, что $\angle 1 = \angle 2$.

211. На рисунке 162 $AO = CO$, $\angle AOB = \angle COB$. Докажите, что ΔABC – равнобедренный.

Рис. 160

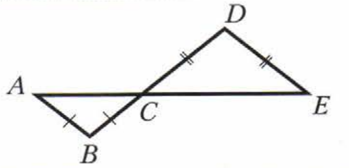


Рис. 161

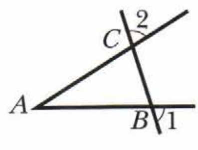
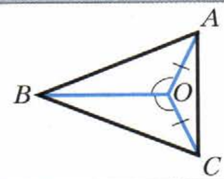


Рис. 162



212. Треугольник ABC – равнобедренный с основанием AC, BD – его биссектриса, DM – биссектриса треугольника BDC. Найдите угол ADM.

213. Один ученик утверждает, что треугольник ABC – равнобедренный, а другой ученик – что треугольник ABC равносторонний.

1) Могут ли оба ученика быть правыми?

2) В каком случае прав только один ученик и какой именно?

214. Используя признаки равенства треугольников, докажите признак равенства равнобедренных треугольников по боковой стороне и углу при вершине.

215. Используя признаки равенства треугольников, докажите признак равенства равнобедренных треугольников по основанию и прилежащему к нему углу.

216. На основании AC равнобедренного треугольника ABC отмечены точки M и K так, что точка M лежит между точками A и K, причём $AM = CK$. Докажите, что ΔMBK – равнобедренный.

217. В треугольнике MKE известно, что $MK = ME$. На стороне KE отмечены точки F и N так, что точка N лежит между точками F и E, причём $\angle KMF = \angle EMN$. Докажите, что $\angle MFN = \angle MNF$.

218. На боковых сторонах CA и CB равнобедренного треугольника ABC отложены равные отрезки CK и CM. Докажите, что: 1) $\Delta AMC = \Delta BKC$; 2) $\Delta AMB = \Delta BKA$.

219. В равнобедренном треугольнике ABC с основанием AC на медиане BD отметили произвольную точку M. Докажите, что: 1) $\Delta AMB = \Delta CMB$; 2) $\Delta AMD = \Delta CMD$.

220. Докажите, что биссектрисы равнобедренного треугольника, проведённые из углов при основании, равны.

221. Докажите, что медианы равнобедренного треугольника, проведённые к боковым сторонам, равны.

222. Докажите, что середины сторон равнобедренного треугольника являются вершинами равнобедренного треугольника.

223. Найдите третью сторону равнобедренного треугольника, если две другие его стороны равны 7 см и 4 см. Сколько решений имеет задача?

224. Одна из сторон равнобедренного треугольника равна 4 см. Найдите две другие стороны, если периметр треугольника равен 14 см.

225. Верно ли утверждение:

1) биссектриса равнобедренного треугольника является его высотой и медианой; 2) биссектриса равностороннего треугольника является его высотой и медианой; 3) если периметр треугольника в 3 раза больше одной из его сторон, то этот треугольник равносторонний?

226. На сторонах равностороннего треугольника ABC (рис. 163) отметили точки M, K и D так, что $AD = BM = CK$. Докажите, что ΔMKD – равносторонний.

227. На продолжениях сторон AB, BC, AC равностороннего треугольника ABC (рис. 164) за точки A, B и C соответственно отложили равные отрезки AD, BK и CE. Докажите, что ΔDEK – равносторонний.

228. Основание равнобедренного треугольника равно 20 см, а его медиана разбивает данный треугольник на два треугольника так, что периметр одного из них на 6 см меньше периметра другого. Найдите боковую сторону данного треугольника. Сколько решений имеет задача?

Упражнения для повторения

229. На рисунке 165 $a \perp b$, $\angle 1 = 35°$. Найдите $\angle 2$, $\angle 3$, $\angle 4$.

Рис. 163

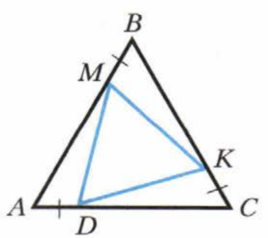


Рис. 164

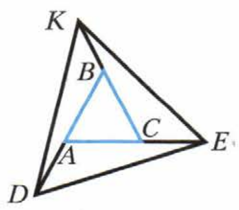
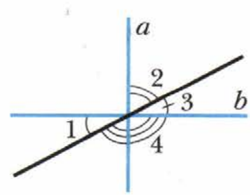


Рис. 165



230. Точки C и D разделили отрезок AB, длина которого равна a, на три отрезка AC, CD и DB так, что $AC = 2CD$, $CD = 2DB$. Найдите расстояние между:

1) точкой A и серединой отрезка CD;

2) серединами отрезков AC и DB.

Наблюдайте, рисуйте, конструируйте, фантазируйте

231. Нарисуйте шестиугольник, который можно одним разрезом разделить на два треугольника.

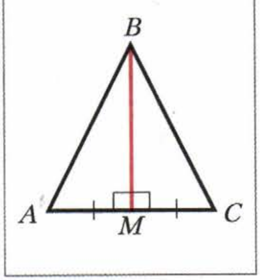
§ 10. Признаки равнобедренного треугольника

В предыдущем параграфе мы рассмотрели свойства равнобедренного треугольника. А как среди треугольников «распознавать» равнобедренные? На этот вопрос дают ответ следующие теоремы-признаки.

Теорема 10.1

Если медиана треугольника является его высотой, то этот треугольник равнобедренный.

Рис. 166



Доказательство

Рассмотрим треугольник ABC, у которого отрезок BM – медиана и высота. Надо доказать, что $AB = BC$ (рис. 166).

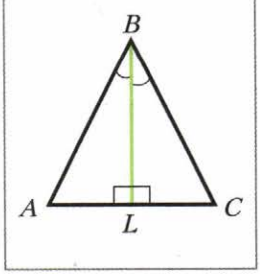
Из условия теоремы следует, что прямая BM – серединный перпендикуляр отрезка AC.

Тогда по свойству серединного перпендикуляра $AB = BC$. ◄

Теорема 10.2

Если биссектриса треугольника является его высотой, то этот треугольник равнобедренный.

Рис. 167



Доказательство

Рассмотрим треугольник ABC, у которого отрезок BL – биссектриса и высота. Надо доказать, что $AB = BC$ (рис. 167).

В треугольниках ABL и CBL сторона BL – общая, $\angle ABL = \angle CBL$ (так как по условию BL – биссектриса угла ABC), $\angle ALB = \angle CLB = 90°$(так как по условию BL – высота). Следовательно, треугольники ABL и CBL равны по второму признаку равенства треугольников. Тогда стороны AB и BC равны как соответственные стороны равных треугольников. ◄

Теорема 10.3

Если в треугольнике два угла равны, то этот треугольник равнобедренный.

Доказательство

Рассмотрим треугольник ABC, у которого $\angle A = \angle C$. Надо доказать, что $AB = BC$.

Проведём серединный перпендикуляр a стороны AC. Докажем, что прямая a проходит через вершину B.

Предположим, что это не так. Тогда прямая a пересекает во внутренней точке сторону AB (рис. 168) или сторону BC (рис. 169).

Рассмотрим первый из этих случаев. Пусть точка K – точка пересечения прямой a со стороной AB. Тогда по свойству серединного перпендикуляра $AK = CK$. Следовательно, треугольник AKC – равнобедренный, а значит, $\angle A = \angle ACK$. Но по условию $\angle A = \angle ACB$. Тогда имеем: $\angle ACB = \angle ACK$, что противоречит основному свойству величины угла.

Аналогично получаем противоречие и для второго случая (рис. 169). Следовательно, наше предположение неверно. Прямая a проходит через точку B (рис. 170), и по свойству серединного перпендикуляра $BA = BC$. ◄

Рис. 168

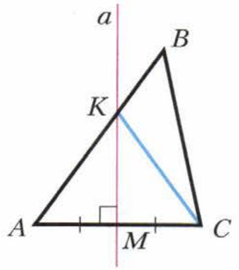


Рис. 169

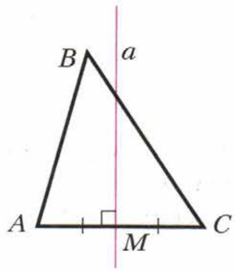
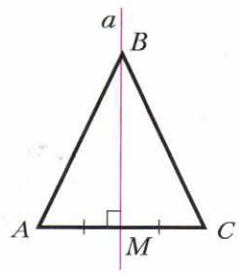


Рис. 170



Из этой теоремы следует, что ***в треугольнике против равных углов лежат равные стороны***.

Теорема 10.4

Если медиана треугольника является его биссектрисой, то этот треугольник равнобедренный.

Доказательство

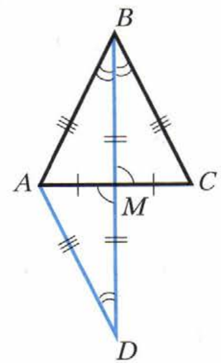
Рассмотрим треугольник ABC, у которого отрезок BM – медиана и биссектриса. Надо доказать, что $AB = BC$.

На луче BM отложим отрезок MD, равный отрезку BM (рис. 171).

В треугольниках AMD и CMB имеем: $AM = MC$ (так как по условию BM – медиана), $BM = MD$ по построению, углы AMD и CMB равны как вертикальные. Следовательно, треугольники AMD и CMB равны по первому признаку равенства треугольников.

Тогда стороны AD и BC, углы ADM и CBM равны как соответственные элементы равных треугольников.

Рис. 171



Так как BD – биссектриса угла ABC, то $\angle ABM = \angle CBM$. Поскольку $\angle CBM = \angle ADM$, то получаем, что $\angle ABM = \angle ADM$.

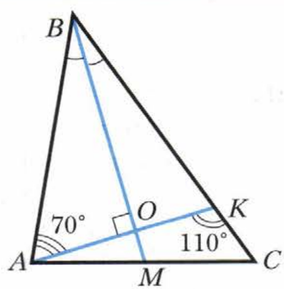
Тогда по теореме 10.3 получаем, что треугольник DAB – равнобедренный, откуда $AD = AB$. И уже доказано, что $AD = BC$. Следовательно, $AB = BC$. ◄

Задача. В треугольнике ABC проведена биссектриса BM (рис. 172), $\angle BAK = 70°$, $\angle AKC = 110°$. Докажите, что $BM \perp AK$.

Решение. Так как углы BKA и AKC – смежные, то $\angle BKA = 180° - \angle AKC$. Тогда $\angle BKA = 180° - 110° = 70°$.

Следовательно, в треугольнике ABK получаем, что $\angle BAK = \angle BKA = 70°$. Треугольник ABK – равнобедренный с основанием AK, и его биссектриса BO (O – точка пересечения AK и BM) является также высотой, т. е. $BM \perp AK$. ◄

Рис. 172



1. Сформулируйте признаки равнобедренного треугольника.
2. Какова связь между равными углами и равными сторонами треугольника?

Упражнения

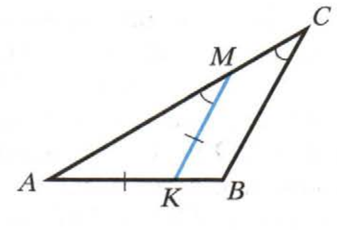
232. В треугольнике ABC медиана BK перпендикулярна стороне AC. Найдите $\angle ABC$, если $\angle ABK = 25°$.

233. Серединный перпендикуляр стороны AC треугольника ABC проходит через вершину B. Найдите $\angle C$, если $\angle A = 17°$.

234. В треугольнике ABC известно, что $\angle ACB = 90°$, $\angle A = \angle B = 45°$, CK – высота. Найдите сторону AB, если $CK = 7$ см.

235. На рисунке 173 $\angle AMK = \angle ACB$, $AK = MK$. Докажите, что ΔABC – равнобедренный.

Рис. 173



236. Прямая, перпендикулярная биссектрисе угла A, пересекает его стороны в точках B и C. Докажите, что ΔABC – равнобедренный.

237. Биссектрисы AM и CK углов при основании AC равнобедренного треугольника ABC пересекаются в точке O. Докажите, что ΔAOC – равнобедренный.

238. В треугольнике ABC биссектриса BK является его высотой. Найдите периметр треугольника ABC, если периметр треугольника ABK равен 16 см и $BK = 5$ см.

239. Верно ли утверждение:

1) если медиана и высота треугольника, проведённые из одной вершины, не совпадают, то этот треугольник не является равнобедренным;

2) если биссектриса треугольника делит противолежащую сторону пополам, то этот треугольник равнобедренный?

240. Медианы AE и CF, проведённые к боковым сторонам BC и AB равнобедренного треугольника ABC, пересекаются в точке M. Докажите, что треугольник AMC – равнобедренный.

241. Точки M и K принадлежат соответственно боковым сторонам AB и BC равнобедренного треугольника ABC, $AM = CK$. Отрезки AK и CM пересекаются в точке O. Докажите, что ΔAOC – равнобедренный.

242. На сторонах AB и BC треугольника ABC отметили соответственно точки D и E так, что $\angle EAC = \angle DCA$. Отрезки AE и CD пересекаются в точке F, $DF = EF$. Докажите, что ΔABC – равнобедренный.

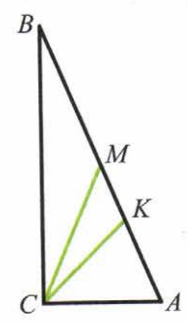
243. Через середину D стороны AB треугольника ABC проведены прямые, перпендикулярные биссектрисам углов ABC и BAC. Эти прямые пересекают стороны AC и BC в точках M и K соответственно. Докажите, что $AM = BK$.

244. Медиана AM треугольника ABC перпендикулярна его биссектрисе BK. Найдите сторону AB, если $BC = 16$ см.

245. Прямая, проходящая через вершину A треугольника ABC перпендикулярно его медиане BD, делит эту медиану пополам. Найдите отношение длин сторон AB и AC треугольника ABC.

246. В треугольнике ABC известно, что $\angle C = 90°$, $\angle A = 67{,}5°$, $\angle B = 22{,}5°$, CK – биссектриса треугольника ABC, CM – биссектриса треугольника BCK (рис. 174). Докажите, что точка M – середина отрезка AB.

Рис. 174



247. Длины сторон треугольника, выраженные в сантиметрах, равны трём идущим подряд натуральным числам. Найдите стороны этого треугольника, если одна из его медиан перпендикулярна одной из его биссектрис.

248. В треугольнике ABC известно, что $AB = 3$ см, $BC = 4$ см, $AC = 6$ см. На стороне BC отметили точку M такую, что $CM = 1$ см. Прямая, проходящая через точку M перпендикулярно биссектрисе угла ACB, пересекает отрезок AC в точке K, а прямая, проходящая через точку K перпендикулярно биссектрисе угла BAC, пересекает прямую AB в точке D. Найдите длину отрезка BD.

Упражнения для повторения

249. На прямой последовательно отметили точки A, B, C, D, E и F так, что $AB = BC = CD = DE = EF$. Найдите отношения $AB : CF$, $AB : BF$, $BD : AE$.

250. Найдите углы, образованные при пересечении двух прямых, если один из них на 42° больше половины второго угла.

Наблюдайте, рисуйте, конструируйте, фантазируйте

251. Разрежьте прямоугольник размером 4×9 на две равные части, из которых можно сложить квадрат.

§ 11. Третий признак равенства треугольников

Теорема 11.1

(третий признак равенства треугольников: по трём сторонам)

Если три стороны одного треугольника равны соответственно трём сторонам другого треугольника, то такие треугольники равны.

Доказательство

Рассмотрим треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ (рис. 175), у которых $AB = A_1B_1$, $BC = B_1C_1$, $CA = C_1A_1$. Докажем, что $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$.

Расположим треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ так, чтобы вершина A совместилась с вершиной A_1, вершина B – с B_1, а вершины C и C_1 лежали в разных полуплоскостях относительно прямой AB (рис. 176). Проведём отрезок CC_1. Так как $AC = A_1C_1$, то треугольник C_1A_1C – равнобедренный, а значит, $\angle 1 = \angle 2$. Аналогично можно доказать, что $\angle 3 = \angle 4$. Следовательно, $\angle A_1C_1B_1 = \angle A_1CB_1$. Тогда треугольники $A_1C_1B_1$ и A_1CB_1 равны по первому признаку равенства треугольников.

Рис. 175

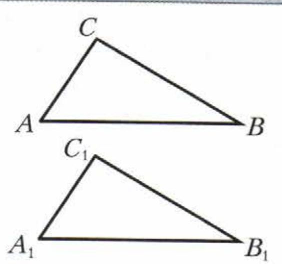


Рис. 176

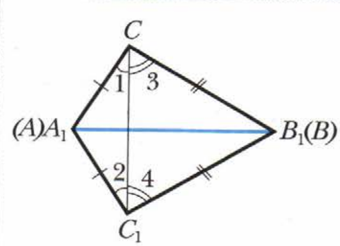
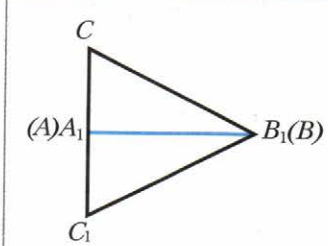
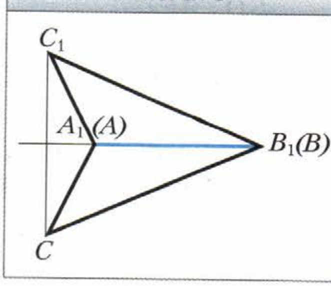


Рис. 177



Казалось бы, доказательство завершено. Однако мы рассмотрели лишь случай, когда отрезок CC_1 пересекает отрезок A_1B_1 во внутренней точке. На самом деле отрезок CC_1 может проходить через один из концов отрезка A_1B_1, например через точку A_1 (рис. 177), или не иметь общих точек с отрезком A_1B_1 (рис. 178). В обоих случаях доказательства будут аналогичными приведённому. Проведите их самостоятельно. ◄

Рис. 178



Из третьего признака равенства треугольников следует, что *треугольник — жёсткая фигура*. Действительно, если четыре рейки скрепить так, как показано на рисунке 179, *а*, то такая конструкция не будет жёсткой (рис. 179, *б*, *в*). Если же добавить ещё одну рейку, создав два треугольника (рис. 179, *г*), то полученная конструкция станет жёсткой. Этот факт широко используют в практике (рис. 180).

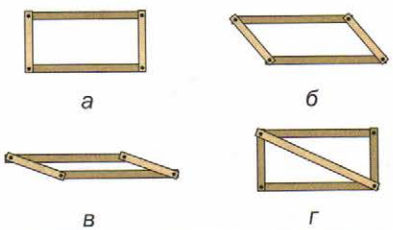


Рис. 179


Рис. 180

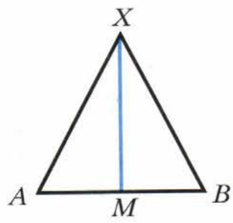


Рис. 181

Теорема 11.2

Если точка равноудалена от концов отрезка, то она принадлежит серединному перпендикуляру этого отрезка.

Доказательство

Пусть точка X равноудалена от концов отрезка AB, т. е. $XA = XB$ (рис. 181). Рассмотрим треугольники AXM и BXM, где точка M — середина отрезка AB. Тогда $\Delta AXM = \Delta BXM$ по третьему признаку равенства треугольников. Отсюда $\angle AMX = \angle BMX$. Сумма этих углов равна $180°$, следовательно, каждый из них равен $90°$. Значит, прямая XM — серединный перпендикуляр отрезка AB.

Заметим, что мы рассмотрели случай, когда точка X не принадлежит прямой AB. Если точка X принадлежит прямой AB, то она совпадает с серединой отрезка AB, а значит, принадлежит его серединному перпендикуляру. ◄

1. Сформулируйте третий признак равенства треугольников.
2. Где находятся точки, равноудалённые от концов отрезка?

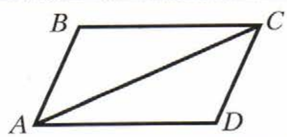


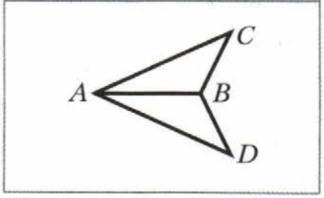
Рис. 182

Упражнения

252. На рисунке 182 $AB = CD$, $BC = AD$. Докажите, что $\angle B = \angle D$.

253. На рисунке 183 $AC = AD$, $BC = BD$. Найдите угол BAC, если $\angle BAD = 25°$.

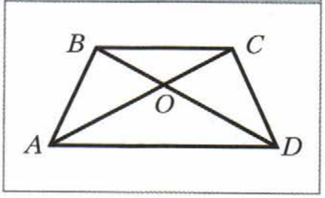
Рис. 183



254. Докажите, что два равнобедренных треугольника равны, если боковая сторона и основание одного треугольника соответственно равны боковой стороне и основанию другого треугольника.

255. Докажите, что два равносторонних треугольника равны, если сторона одного треугольника равна стороне другого треугольника.

Рис. 184



256. На рисунке 184 $\Delta ABC = \Delta BCD$, причём $AB = CD$. Докажите, что $\Delta ABD = \Delta DCA$.

257. На рисунке 184 $AB = CD$, $AC = BD$. Докажите, что ΔBOC – равнобедренный.

258. Каждая из точек M и N равноудалена от концов отрезка AB. Докажите, что прямая MN – серединный перпендикуляр отрезка AB.

259. На рисунке 185 $AB = KE$, $BC = KM$, $AM = EC$. Докажите, что $\angle AMK = \angle BCE$.

260. На рисунке 186 $AB = CD$, $BC = AD$, BM – биссектриса угла ABC, DK – биссектриса угла ADC. Докажите, что $\Delta ABM = \Delta CDK$.

261. Равные отрезки AB и CD пересекаются в точке O так, что $OA = OD$. Докажите, что $\Delta ABC = \Delta BDC$.

262. Отрезки BD и B_1D_1 – биссектрисы треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ соответственно, $AB = A_1B_1$, $BD = B_1D_1$, $AD = A_1D_1$. Докажите, что $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$.

263. Коля утверждает, что ему удалось сделать рисунок, на котором $AB = AC$ и $AM = AN$ (рис. 187). Прав ли Коля?

Рис. 185

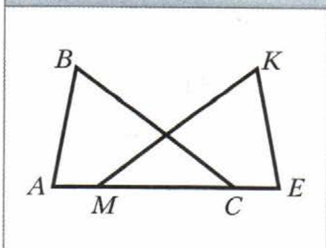


Рис. 186

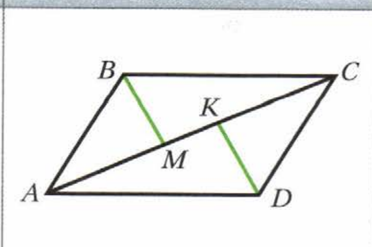
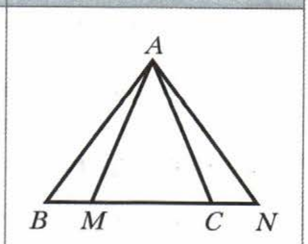


Рис. 187



264. Будут ли два треугольника равными, если каждой стороне одного треугольника равна некоторая сторона другого треугольника?

265. Докажите равенство двух треугольников по двум сторонам и медиане, проведённой к третьей стороне.

Упражнения для повторения

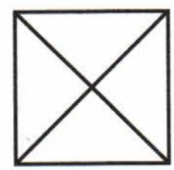
266. На отрезке AB отметили точки C и D так, что $AC : BC = 7 : 8$, $AD : BD = 13 : 17$. Найдите длину отрезка AB, если расстояние между точками C и D равно 2 см.

267. Прямые AB и CD пересекаются в точке O, лучи OM и OK – биссектрисы соответственно углов AOC и BOC, образовавшихся при этом. Будет ли угол MOK прямым?

Наблюдайте, рисуйте, конструируйте, фантазируйте

268. Квадрат разрезали по диагоналям на четыре треугольника (рис. 188). Сложите из этих треугольников два квадрата.

Рис. 188



§ 12. Теоремы

Вы видите, что в учебнике появляется всё больше и больше теорем. И это не удивительно: ведь геометрия в основном состоит из теорем и их доказательств.

Формулировки всех теорем, которые мы доказали, состоят из двух частей. Первую часть теоремы (то, что дано) называют **условием** теоремы, вторую часть теоремы (то, что требуется доказать) – **заключением**.

Например, в теореме 8.1 (первый признак равенства треугольников) условием является то, что ***две стороны и угол между ними одного треугольника равны двум сторонам и углу между ними другого треугольника***, а заключением – ***равенство треугольников***.

Все знакомые вам теоремы можно условно разделить на **теоремы-свойства** и **теоремы-признаки**. Например, теорема 1.1 устанавливает свойство пересекающихся прямых, теорема 9.1 – свойство равнобедренного треугольника.

Теоремы-признаки перечисляют свойства, по которым можно распознать фигуру, т. е. отнести её к тому или иному виду (классу).

Так, теоремы-признаки равенства треугольников указывают требования, по которым два треугольника можно причислить к классу равных. Например, в теоремах 10.1–10.4 сформулированы свойства, по которым распознают равнобедренный треугольник.

Теоремы, которые следуют *непосредственно* из аксиом или теорем, называют **теоремами-следствиями** или **следствиями**.

Например, свойство углов, противолежащих равным сторонам треугольника, является следствием из теоремы 9.1.

Если в теореме 8.2 о свойстве серединного перпендикуляра поменять местами условие и заключение, то получим теорему 11.2. Такие теоремы называют **взаимно обратными**. Если какую-то из этих теорем назвать **прямой**, то вторую теорему будем называть **обратной**.

Меняя местами условие и заключение теоремы, надо быть очень внимательными: не всегда можно получить истинное утверждение. Например, утверждение, обратное теореме 4.1 о сумме смежных углов, неверно. Действительно, если сумма каких-то двух углов равна 180°, то совершенно не обязательно, чтобы эти углы были смежными.

Вы знаете, что справедливость теоремы устанавливают путём логических рассуждений, т. е. доказательства.

Теорема 1.1 была доказана методом **от противного**. Название этого метода фактически отражает его суть. Мы предположили, что заключение теоремы 1.1 неверно. На основании этого предположения с помощью логических рассуждений был получен факт, который противоречил основному свойству прямой.

Методом от противного также были доказаны и другие теоремы, например теоремы 5.1, 10.3.

Очень важно, чтобы доказательство теоремы было полным, т. е. рассмотрены все возможные случаи. Так, полное доказательство теоремы 11.1 (третий признак равенства треугольников) потребовало рассмотрения всех трёх возможных случаев.

Умение видеть все тонкости и нюансы доказательства — важнейшее качество, формирующее математическую культуру. Если бы, например, при доказательстве теоремы 8.2 о свойстве серединного перпендикуляра мы не рассмотрели отдельно случай, когда точка X является серединой отрезка AB, то обращение к треугольникам AXM и BXM было бы не совсем «законным».

При доказательстве теоремы 10.4 (признак равнобедренного треугольника) мы использовали **приём дополнительного построения**: чертёж дополнили элементами, о которых не шла речь в условии теоремы. Этот метод является ключом к решению многих задач и доказательству ряда теорем. Поэтому очень важно научиться видеть «выгодное» (результативное) дополнительное построение.

А как приобрести такое «геометрическое зрение»? Вопрос непростой, и на него сложно ответить конкретными рекомендациями. Но всё же мы советуем, во-первых, не быть равнодушными к геометрии, а полюбить этот интересный предмет, во-вторых, решать больше задач, чтобы развить интуицию и приобрести нужный опыт.

1. Из каких двух частей состоит формулировка теоремы?
2. Как называют теоремы, в которых перечислены свойства, относящие фигуру к какому-то виду (классу)?
3. Как называют теорему, непосредственно следующую из аксиомы или другой теоремы?
4. Как называют теоремы, в которых условие и заключение поменяли местами?
5. В чём состоит метод доказательства от противного?
6. Какие из теорем 1.1, 4.2, 5.1, 8.3 доказаны методом от противного?
7. В чём состоит приём дополнительного построения?

Упражнения

269. В теоремах 4.1, 8.2, 9.1, 10.3, 11.2 укажите условие и заключение теоремы.

270. Из теорем 4.1, 8.2, 9.1, 10.3, 11.2 выберите: 1) теоремы-свойства; 2) теоремы-признаки.

271. Сформулируйте утверждение, обратное данному:
1) если треугольник равносторонний, то его углы равны;
2) если два угла вертикальные, то их биссектрисы являются дополнительными лучами;
3) если угол между биссектрисами двух углов прямой, то эти углы смежные;
4) если сторона и противолежащий ей угол одного треугольника равны соответственно стороне и противолежащему ей углу другого треугольника, то эти треугольники равны.

Для какого из данных утверждений:
1) прямое и обратное утверждения истинны;
2) прямое утверждение истинно, а обратное — ложно;
3) прямое утверждение ложно, а обратное — истинно?

272. Сформулируйте утверждение, обратное данному:
1) если точка B лежит между точками A и C, то $AB + BC = AC$;
2) если два треугольника не равны, то их периметры также не равны;
3) если градусная мера угла больше $90°$, то он тупой.

Для какого из данных утверждений:

1) прямое и обратное утверждения истинны;

2) прямое утверждение истинно, а обратное – ложно;

3) прямое утверждение ложно, а обратное – истинно?

273. Сформулируйте утверждение, отрицающее данное:

1) отрезок AB пересекает прямую m;

2) градусная мера угла ABC больше $40°$;

3) из двух смежных углов хотя бы один не больше $90°$;

4) лучи OA и OB не являются дополнительными;

5) отрезок имеет только одну середину.

274. Сформулируйте утверждение, отрицающее данное:

1) угол ABC не является прямым;

2) треугольник MKE – равнобедренный;

3) через точку на прямой можно провести только одну прямую, перпендикулярную данной;

4) луч AC делит угол BAK пополам.

275. Докажите, используя метод от противного, что если любая высота треугольника не совпадает с биссектрисой, проведённой из этой же вершины, то треугольник не является равнобедренным.

276. Докажите, используя метод от противного, что если стороны AB и BC треугольника ABC не равны, то его медиана BD не является его высотой.

277. Докажите методом от противного, что если разность двух углов равна $1°$, то они не могут быть вертикальными.

278. Докажите методом от противного, что из двух смежных углов хотя бы один не меньше $90°$.

279. Сформулируйте и докажите признак равенства равнобедренных треугольников по боковой стороне и медиане, проведённой к боковой стороне.

280. Сформулируйте и докажите признак равенства треугольников по стороне, медиане, проведённой к этой стороне, и углу между медианой и этой стороной.

281. Докажите признак равенства треугольников по медиане и углам, на которые она разбивает угол треугольника.

Упражнения для повторения

282. Отметьте на прямой точки A, B и C. Поставьте вместо многоточия один из знаков «<», «>», «=», чтобы образовалась правильная запись:

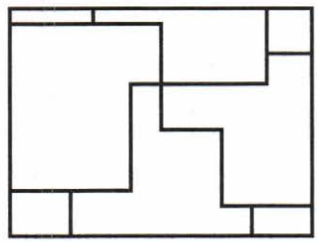
1) $AB + BC \dots AC$;
2) $AB + AC \dots BC$;
3) $AC + BC \dots AB$.

283. Угол между биссектрисой одного из смежных углов и их общей стороной составляет $\frac{1}{3}$ второго угла. Найдите градусные меры этих смежных углов.

Наблюдайте, рисуйте, конструируйте, фантазируйте

284. Длины сторон прямоугольника равны 4 и 3 см. Найдите сумму длин всех отрезков, расположенных внутри прямоугольника (рис. 189).

Рис. 189



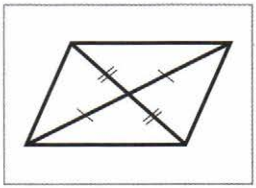
Задание № 2 «Проверьте себя» в тестовой форме

1. Треугольник является остроугольным, если
А) среди его углов нет тупого
Б) каждый его угол меньше прямого
В) среди его углов нет прямого
Г) каждый его угол меньше тупого

2. Если высота треугольника ему не принадлежит, то этот треугольник является:
А) прямоугольным
Б) тупоугольным
В) равносторонним
Г) остроугольным

3. Два треугольника равны, если
А) две стороны одного треугольника равны двум сторонам другого треугольника
Б) два угла одного треугольника равны двум углам другого треугольника
В) две стороны и угол одного треугольника равны двум сторонам и углу другого треугольника
Г) две стороны и угол между ними одного треугольника равны двум сторонам и углу между ними другого треугольника

4. Сколько пар равных треугольников изображено на рисунке?



А) 1 Б) 2 В) 3 Г) 4

5. Известно, что M – середина стороны AC треугольника ABC. На луче BM вне треугольника отложили отрезок ME, равный отрезку BM. Найдите EC, если $AB = 4,2$ см.
А) 2,1 см Б) 4,2 см В) 4,8 см Г) 8,4 см

6. Какое из следующих утверждений истинно?
А) равнобедренный треугольник – частный случай разностороннего треугольника
Б) равносторонний треугольник – частный случай разностороннего треугольника
В) равносторонний треугольник – частный случай равнобедренного треугольника
Г) равнобедренный треугольник – частный случай равностороннего треугольника

7. Какое из следующих утверждений неверно?

А) если высота треугольника делит сторону, к которой она проведена, на равные отрезки, то этот треугольник – равнобедренный

Б) если медиана и биссектриса, проведённые из одной вершины, не совпадают, то этот треугольник не является равнобедренным

В) если треугольник равносторонний, то длина любой его высоты равна длине любой его биссектрисы

Г) если два угла треугольника равны, то биссектриса третьего угла делит противолежащую сторону треугольника на равные отрезки

8. Треугольник является равносторонним, если

А) его сторона в 3 раза меньше его периметра

Б) каждая его сторона в 3 раза меньше его периметра

В) две его высоты равны

Г) две его биссектрисы равны

9. Периметр равнобедренного треугольника ABC ($AB = BC$) равен 16 см. Периметр треугольника ABM, где M – середина отрезка AC, равен 12 см. Найдите длину медианы BM.

А) 4 см Б) 6 см В) 2 см Г) 5 см

10. Каждая из точек X и Y равноудалена от концов отрезка AB. Какое из следующих утверждений неверно?

А) прямые XY и AB перпендикулярны В) $\angle AXB = \angle AYB$

Б) $\angle XAY = \angle XBY$ Г) $\angle AXY = \angle BXY$

11. Точка M – середина отрезка AB. Точка X не принадлежит серединному перпендикуляру отрезка AB, если

А) $XA = XB$

Б) $XM = XB$

В) $XM \perp AB$

Г) $\angle XAM = \angle XBM$

Итоги главы 2

Равные фигуры

Две фигуры называют равными, если их можно совместить наложением.

Основное свойство равенства треугольников

Для данного треугольника ABC и луча A_1M существует треугольник $A_1B_1C_1$, равный треугольнику ABC, такой, что $AB = A_1B_1$, $BC = B_1C_1$, $AC = A_1C_1$ и сторона A_1B_1 принадлежит лучу A_1M, а вершина C_1 лежит в заданной полуплоскости относительно прямой A_1M.

Теорема о единственности прямой, перпендикулярной данной

Через точку, не принадлежащую данной прямой, проходит только одна прямая, перпендикулярная данной.

Высота треугольника

Перпендикуляр, опущенный из вершины треугольника на прямую, содержащую противолежащую сторону, называют высотой треугольника.

Медиана треугольника

Отрезок, соединяющий вершину треугольника с серединой противолежащей стороны, называют медианой треугольника.

Биссектриса треугольника

Отрезок биссектрисы угла треугольника, соединяющий вершину треугольника с точкой противолежащей стороны, называют биссектрисой треугольника.

Первый признак равенства треугольников: по двум сторонам и углу между ними

Если две стороны и угол между ними одного треугольника равны соответственно двум сторонам и углу между ними другого треугольника, то такие треугольники равны.

Второй признак равенства треугольников: по стороне и двум прилежащим к ней углам

Если сторона и два прилежащих к ней угла одного треугольника равны соответственно стороне и двум прилежащим к ней углам другого треугольника, то такие треугольники равны.

Третий признак равенства треугольников: по трём сторонам

Если три стороны одного треугольника равны соответственно трём сторонам другого треугольника, то такие треугольники равны.

Серединный перпендикуляр отрезка

Прямую, перпендикулярную отрезку и проходящую через его середину, называют серединным перпендикуляром отрезка.

Равнобедренный треугольник

Треугольник, у которого две стороны равны, называют равнобедренным.

Равносторонний треугольник

Треугольник, у которого все стороны равны, называют равносторонним.

Свойства равнобедренного треугольника

В равнобедренном треугольнике: 1) углы при основании равны; 2) биссектриса треугольника, проведённая из угла при вершине, является медианой и высотой.

Свойства треугольников, следующие из свойств равнобедренного треугольника

- В треугольнике против равных сторон лежат равные углы.
- В равнобедренном треугольнике биссектриса, высота и медиана, проведённые из его вершины, совпадают.
- В равностороннем треугольнике все углы равны.
- В равностороннем треугольнике биссектриса, высота и медиана, проведённые из одной вершины, совпадают.

Признаки равнобедренного треугольника

- Если медиана треугольника является его высотой, то этот треугольник равнобедренный.
- Если биссектриса треугольника является его высотой, то этот треугольник равнобедренный.
- Если в треугольнике два угла равны, то этот треугольник равнобедренный.
- Если медиана треугольника является его биссектрисой, то этот треугольник равнобедренный.

Глава 3. Параллельные прямые. Сумма углов треугольника

Как установить параллельность двух прямых? Какими свойствами обладают параллельные прямые? Чему равна сумма углов произвольного треугольника? Какими свойствами обладает прямоугольный треугольник? Изучив материал этой главы, вы получите ответы на поставленные вопросы.

§ 13. Параллельные прямые

Определение

Две прямые называют параллельными, если они не пересекаются.

На рисунке 190 изображены параллельные прямые a и b. Пишут $a \parallel b$ (читают: «прямые a и b параллельны» или «прямая a параллельна прямой b»).

Если два отрезка лежат на параллельных прямых, то их называют параллельными. На рисунке 191 отрезки AB и CD параллельны. Пишут $AB \parallel CD$.

Рис. 190

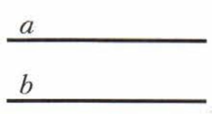


Рис. 191

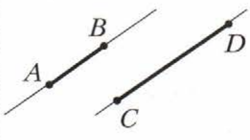


Рис. 192

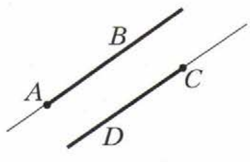
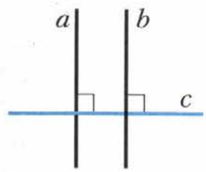


Рис. 193



Также можно говорить о параллельности двух лучей, луча и отрезка, прямой и луча, отрезка и прямой. Например, на рисунке 192 изображены параллельные лучи AB и CD.

Теорема 13.1
(признак параллельности прямых)

Две прямые, перпендикулярные третьей прямой, параллельны.

Доказательство

На рисунке 193 $a \perp c$ и $b \perp c$. Надо доказать, что $a \parallel b$.

Предположим, что прямые a и b пересекаются в некоторой точке M (рис. 194). Тогда через точку M, не принадлежащую прямой c, проходят две прямые a и b, перпендикулярные прямой c. Это противоречит теореме 7.1. Следовательно, $a \parallel b$. ◂

Доказанная теорема разъясняет, почему с помощью линейки и угольника можно строить параллельные прямые так, как показано на рисунке 195.

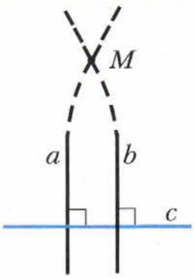


Рис. 194

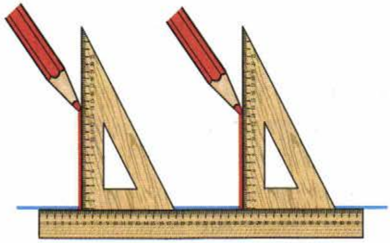


Рис. 195

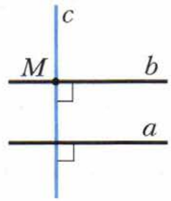


Рис. 196

Следствие

Через данную точку M, не принадлежащую прямой a, можно провести прямую b, параллельную прямой a.

Доказательство

Пусть точка M не принадлежит прямой a (рис. 196).

Проведём (например, с помощью угольника) через точку M прямую c, перпендикулярную прямой a. Теперь через точку M проведём прямую b, перпендикулярную прямой c. В силу теоремы 13.1 $a \parallel b$. ◂

Можно ли через точку M (рис. 196) провести ещё одну прямую, параллельную прямой a? Ответ на этот вопрос даёт основное свойство параллельных прямых.

Основное свойство параллельных прямых

(аксиома параллельности прямых)

Через точку, не лежащую на данной прямой, проходит только одна прямая, параллельная данной.

Теорема 13.2

Если две прямые параллельны третьей прямой, то они параллельны.

Доказательство

Пусть $b \parallel a$ и $c \parallel a$. Докажем, что $b \parallel c$.

Предположим, что прямые b и c не параллельны, а пересекаются в некоторой точке M (рис. 197). Получается, что через точку M проходят две прямые, параллельные прямой a, что противоречит аксиоме параллельности прямых. Следовательно, $b \parallel c$. ◄

Рис. 197

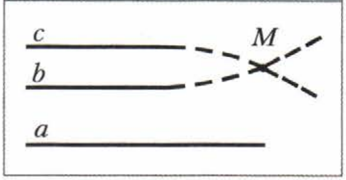
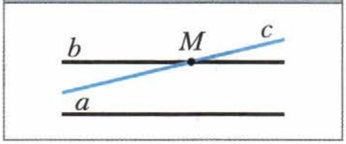


Рис. 198



<u>Задача.</u> Докажите, что если прямая пересекает одну из двух параллельных прямых, то она пересекает и другую.

Решение. Пусть прямые a и b параллельны, прямая c пересекает прямую b в точке M (рис. 198). Предположим, что прямая c не пересекает прямую a, тогда $c \parallel a$. Но в этом случае через точку M проходят две прямые b и c, параллельные прямой a, что противоречит аксиоме параллельности прямых.

Следовательно, прямая c пересекает прямую a. ◄

1. Какие две прямые называют параллельными?
2. Каким символом обозначают параллельность прямых?
3. Как читают запись $m \parallel n$?
4. Какие отрезки называют параллельными?
5. Каково взаимное расположение двух прямых, перпендикулярных третьей прямой?
6. Сформулируйте аксиому параллельности прямых.
7. Каково взаимное расположение двух прямых, параллельных третьей прямой?
8. Если прямая пересекает одну из двух параллельных прямых, то как эта прямая расположена относительно второй из параллельных прямых?

Практические задания

285. Перерисуйте в тетрадь рисунок 199. Проведите через каждую из точек A и B прямую, параллельную прямой m.

286. Начертите треугольник и проведите через каждую его вершину прямую, параллельную противолежащей стороне.

287. Перерисуйте в тетрадь рисунок 200. Проведите через точку B прямую m, параллельную прямой AC, а через точку D – прямую n, параллельную прямой AC. Каково взаимное расположение прямых m и n?

Рис. 199

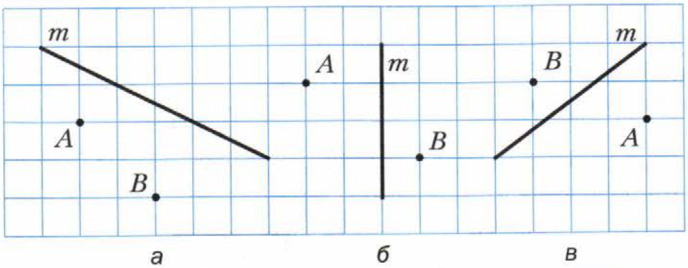
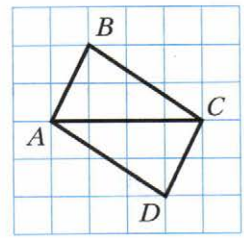


Рис. 200



Упражнения

288. Можно ли провести прямую, которая была бы параллельна каждой из пересекающихся прямых a и b?

289. Прямая a параллельна стороне AB треугольника ABC. Может ли прямая a быть параллельной стороне AC? Стороне BC?

290. Прямые a и b пересекаются. Можно ли провести такую прямую c, которая была бы параллельна прямой a и пересекала прямую b?

291. Являются ли два отрезка параллельными, если они не имеют общих точек?

292. Верно ли, что из точки, не принадлежащей данной прямой, можно провести только один луч, параллельный данной прямой?

293. Сколько можно провести отрезков, параллельных данной прямой, через точку, не принадлежащую этой прямой?

294. Прямые a и b перпендикулярны прямой c, прямая d пересекает прямую a. Пересекает ли прямая d прямую b?

295. Докажите, что если любая прямая, пересекающая прямую a, пересекает и прямую b, то прямые a и b параллельны.

Упражнения для повторения

296. На отрезке AB отметили точки C и D так, что $AC = BD$. Точка O – середина отрезка CD. Найдите расстояние между точками C и D, если $AB = 21$ см, $AO : OD = 7 : 2$.

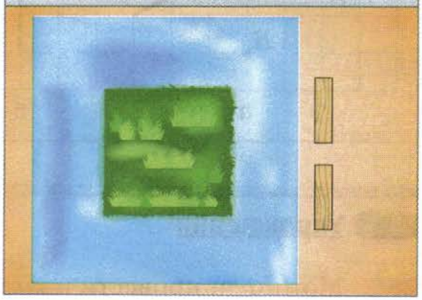
297. Углы ABD и DBC, а также углы ABF и FBC – смежные и лежат в разных полуплоскостях относительно прямой AC, $\angle ABD = 80°$, $\angle ABF = 150°$, BM – биссектриса угла DBF. Найдите угол MBC.

298. В треугольнике ABC медиана CM равна половине стороны AB, $\angle A = 47°$, $\angle B = 43°$. Чему равен угол ACB?

Наблюдайте, рисуйте, конструируйте, фантазируйте

299. Катя и Женя подошли к квадратному пруду, в середине которого находится квадратный остров (рис. 201). На берегу они нашли две доски чуть-чуть короче ширины пролива между берегом пруда и островом. Как им всё-таки попасть на остров, используя эти доски?

Рис. 201



§ 14. Признаки параллельности двух прямых

Если две прямые a и b пересечь третьей прямой c, то образуется восемь углов (рис. 202). Прямую c называют **секущей** прямых a и b.

Углы 3 и 6, 4 и 5 называют **односторонними**.

Углы 3 и 5, 4 и 6 называют **накрест лежащими**.

Углы 6 и 2, 5 и 1, 3 и 7, 4 и 8 называют **соответственными**.

Теорема 14.1

Если накрест лежащие углы, образующиеся при пересечении двух прямых секущей, равны, то прямые параллельны.

Доказательство

На рисунке 203 прямая c является секущей прямых a и b, $\angle 1 = \angle 2$. Докажем, что $a \parallel b$.

Рис. 202

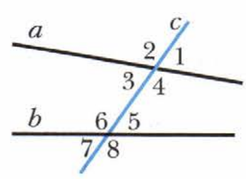
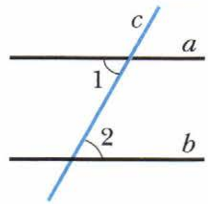


Рис. 203



Если $\angle 1 = \angle 2 = 90°$ (рис. 204), то параллельность прямых a и b следует из теоремы 13.1.

Пусть теперь прямая c не перпендикулярна ни прямой a, ни прямой b. Обозначим A и B – точки пересечения прямой c с прямыми a и b соответственно. Отметим точку M – середину отрезка AB (рис. 205). Через точку M проведём перпендикуляр ME к прямой a. Пусть прямая ME пересекает прямую b в точке F. Имеем: углы 1 и 2 равны по условию, углы 3 и 4 равны как вертикальные. Следовательно, треугольники AME и BMF равны по второму признаку равенства треугольников. Отсюда $\angle AEM = \angle MFB = 90°$. Мы показали, что прямые a и b перпендикулярны прямой EF, значит, они параллельны. ◄

Теорема 14.2

Если сумма односторонних углов, образующихся при пересечении двух прямых секущей, равна 180°, то прямые параллельны.

Доказательство

На рисунке 206 прямая c является секущей прямых a и b, $\angle 1 + \angle 2 = 180°$. Докажем, что $a \parallel b$.

Углы 1 и 3 смежные, следовательно, $\angle 1 + \angle 3 = 180°$. Поскольку $\angle 1 + \angle 2 = 180°$, то $\angle 2 = \angle 3$. А углы 2 и 3 накрест лежащие. Поэтому в силу теоремы 14.1 $a \parallel b$. ◄

Рис. 204

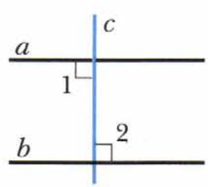


Рис. 205

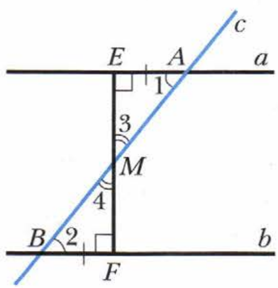
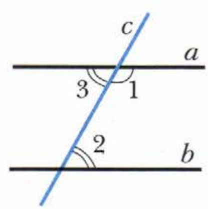


Рис. 206



Теорема 14.3

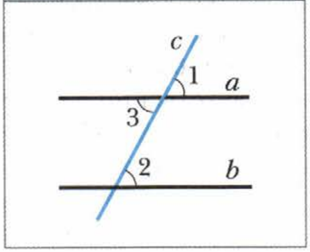
Если соответственные углы, образующиеся при пересечении двух прямых секущей, равны, то прямые параллельны.

Доказательство

На рисунке 207 прямая c является секущей прямых a и b, $\angle 1 = \angle 2$. Докажем, что $a \parallel b$.

Углы 1 и 3 равны как вертикальные. Следовательно, $\angle 2 = \angle 3$. Но углы 2 и 3 накрест лежащие. Поэтому в силу теоремы 14.1 $a \parallel b$. ◄

Рис. 207

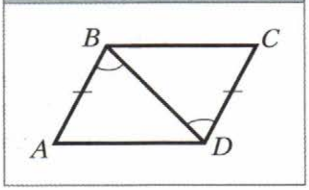


Задача. На рисунке 208 $AB = CD$, $\angle ABD = \angle CDB$. Докажите, что $BC \parallel AD$.

Решение. Для треугольников ABD и CDB имеем: $AB = CD$ и $\angle ABD = \angle CDB$ по условию, BD – общая сторона. Значит, треугольники ABD и CDB равны по двум сторонам и углу между ними.

Тогда $\angle BDA = \angle DBC$. Кроме этого, углы BDA и DBC – накрест лежащие при прямых BC и AD и секущей BD. Следовательно, $BC \parallel AD$. ◄

Рис. 208



1. Какими должны быть накрест лежащие углы, образованные при пересечении двух прямых секущей, чтобы данные прямые были параллельными?

2. Какими должны быть односторонние углы, образованные при пересечении двух прямых секущей, чтобы данные прямые были параллельными?

3. Какими должны быть соответственные углы, образованные при пересечении двух прямых секущей, чтобы данные прямые были параллельными?

Практические задания

300. Проведите две прямые AB и CD. Проведите прямую MK, пересекающую каждую из прямых AB и CD. Обозначьте точку пересечения прямых AB и MK буквой O, а прямых CD и MK – буквой E. Заполните пропуски в тексте:

1) углы AOM и ... – соответственные;
2) углы AOE и ... – соответственные;
3) углы AOE и ... – накрест лежащие;
4) углы AOE и ... – односторонние.

Укажите, какими углами (соответственными, накрест лежащими или односторонними) являются:

1) $\angle BOM$ и $\angle DEM$;

2) $\angle BOE$ и $\angle DEM$;

3) $\angle BOE$ и $\angle OEC$.

301. Начертите две прямые и проведите их секущую. Пронумеруйте углы, образованные при пересечении данных прямых секущей. Укажите среди этих углов все пары:

1) соответственных углов;

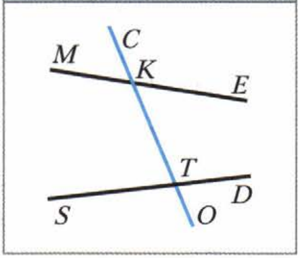
2) односторонних углов;

3) накрест лежащих углов.

Упражнения

302. На рисунке 209 укажите все пары накрест лежащих, односторонних и соответственных углов.

Рис. 209



303. На рисунке 210 укажите углы:

1) односторонние при прямых BC и AD и секущей AB;

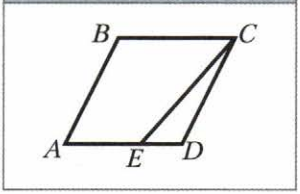
2) односторонние при прямых CE и CD и секущей AD;

3) накрест лежащие при прямых BC и AD и секущей CE;

4) соответственные при прямых CE и CD и секущей AD;

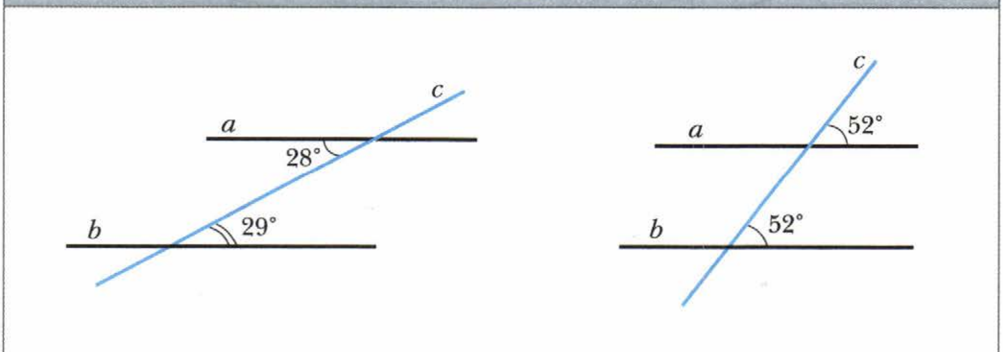
5) односторонние при прямых BC и AD и секущей CE.

Рис. 210



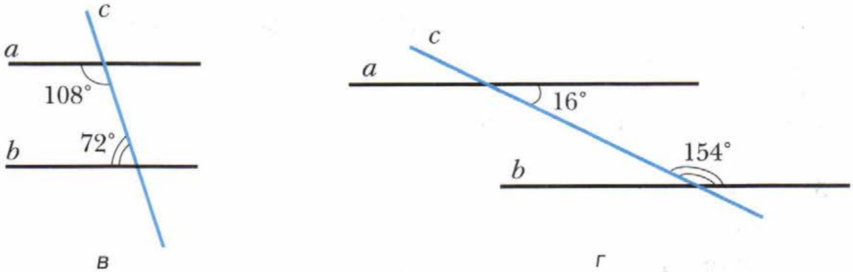
304. На каких из рисунков 211, *а–г* прямые a и b параллельны?

Рис. 211



а *б*

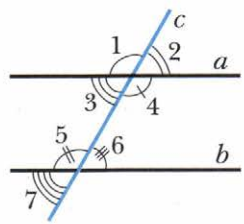
Рис. 211 (окончание)



305. Параллельны ли изображённые на рисунке 212 прямые a и b, если:

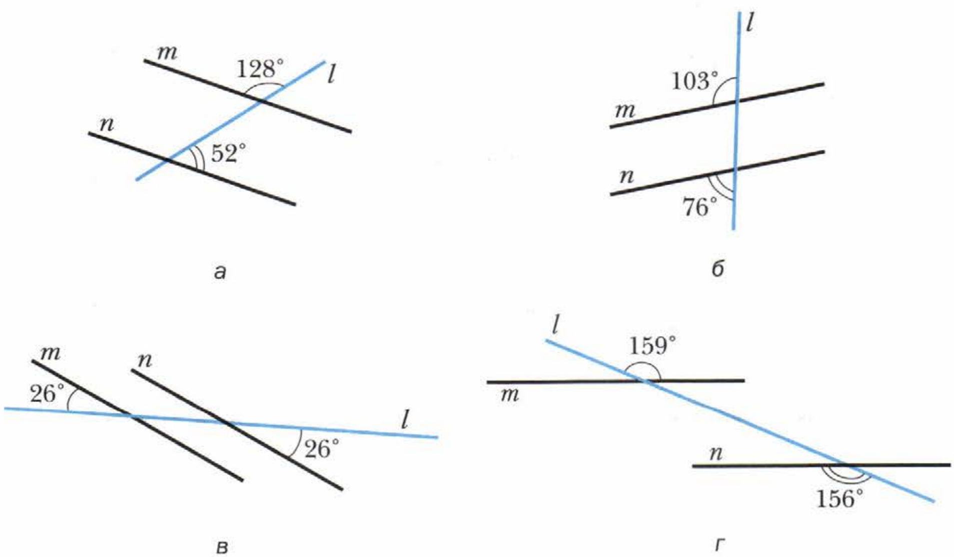
1) $\angle 3 = \angle 6$;
2) $\angle 2 = \angle 6$;
3) $\angle 4 = 125°$, $\angle 6 = 55°$;
4) $\angle 2 = 35°$, $\angle 5 = 146°$;
5) $\angle 1 = 98°$, $\angle 6 = 82°$;
6) $\angle 1 = 143°$, $\angle 7 = 37°$?

Рис. 212



306. На каких из рисунков 213, *а–г* прямые m и n параллельны?

Рис. 213



307. На рисунке 214 укажите все пары параллельных прямых.

Рис. 214

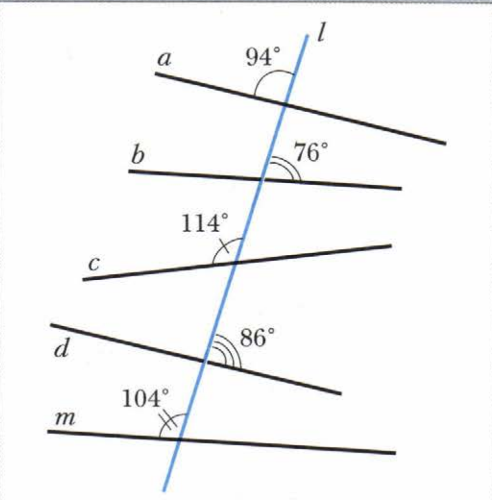
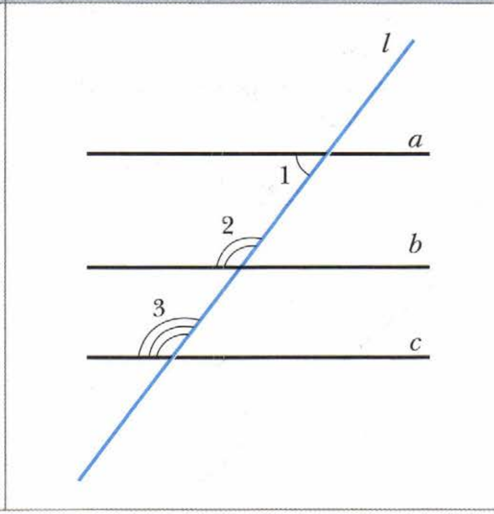


Рис. 215



308. На рисунке 215 укажите параллельные прямые, если $\angle 1 = 53°$, $\angle 2 = 128°$, $\angle 3 = 127°$.

309. На рисунке 216 $AB = BC$, $CD = DK$. Докажите, что $AB \parallel DK$.

310. На рисунке 217 AK – биссектриса угла BAC, $AM = MK$. Докажите, что $MK \parallel AC$.

311. На рисунке 218 $\angle ACB = \angle ACD$, $AD = CD$. Докажите, что $BC \parallel AD$.

Рис. 216

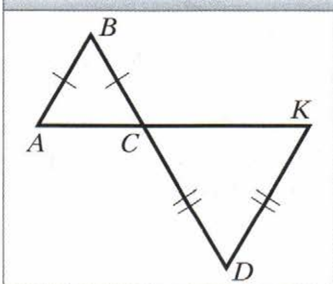


Рис. 217

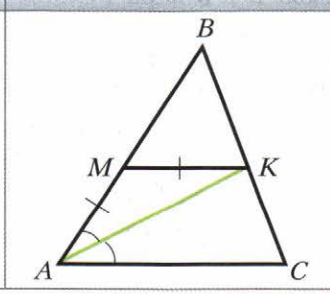
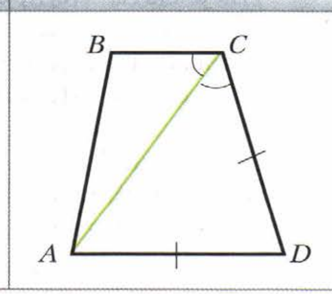


Рис. 218

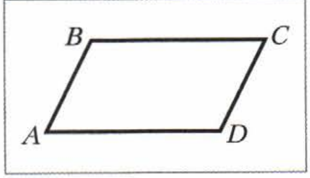


312. В треугольнике ABC известно, что $AB = BC$, $\angle A = 60°$, $\angle BCD$ – смежный с $\angle ACB$, CM – биссектриса угла BCD. Докажите, что $AB \parallel CM$.

313. Отрезки AB и CD пересекаются в точке O и делятся этой точкой пополам. Докажите, что $AC \parallel BD$.

314. На рисунке 219 $AB = CD$, $BC = AD$. Докажите, что $AB \parallel CD$.

Рис. 219



315. Известно, что некоторая прямая m пересекает прямую a (рис. 220). Пересекает ли прямая m прямую b?

316. Каково взаимное расположение прямых CD и EF на рисунке 221?

Рис. 220

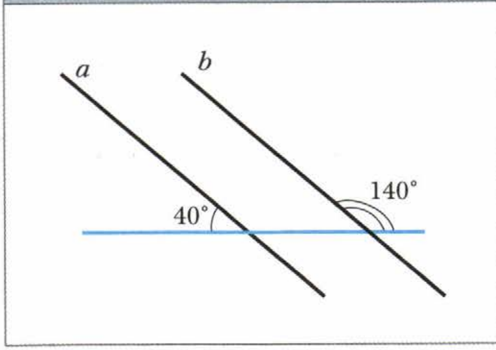
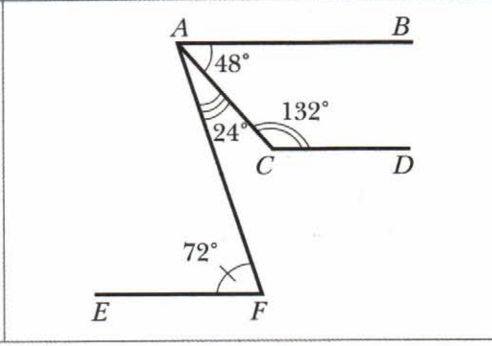


Рис. 221



317. Угол ABC равен 60°, а угол BCD – 120°. Можно ли утверждать, что прямые AB и CD параллельны?

318. Угол между прямыми a и c равен углу между прямыми b и c. Можно ли утверждать, что прямые a и b параллельны?

319. Четыре угла, образованные при пересечении прямых a и b прямой c, равны по 40°, а любой из остальных четырёх углов – 140°. Можно ли утверждать, что прямые a и b параллельны?

320. Прямая пересекает биссектрису BM треугольника ABC в точке O, являющейся серединой отрезка BM, а сторону BC – в точке K. Докажите, что если $OK \perp BM$, то $MK \parallel AB$.

321. Отрезки AM и CK – медианы треугольника ABC. На продолжении отрезка AM за точку M отложен отрезок MF, а на продолжении отрезка CK за точку K – отрезок KD так, что $MF = AM$, $KD = CK$. Докажите, что точки B, D и F лежат на одной прямой.

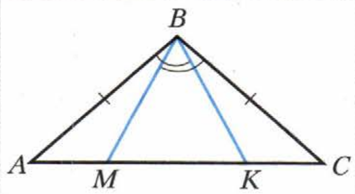
Упражнения для повторения

322. Луч OC разбивает угол AOB на два угла так, что $\angle AOC : \angle BOC = 3 : 5$. Найдите угол между лучом OC и биссектрисой угла, смежного с углом AOB, если угол BOC на 42° больше угла AOC.

323. На рисунке 222 $AB = BC$, $\angle ABK = \angle CBM$. Докажите, что $BM = BK$.

324. Равнобедренные треугольники ABC и ADC имеют общее основание AC. Прямая BD пересекает отрезок AC в точке E. Докажите, что $AE = EC$.

Рис. 222



Наблюдайте, рисуйте, конструируйте, фантазируйте

325. Приведите пример, когда общей частью (пересечением) треугольника и четырёхугольника является восьмиугольник.

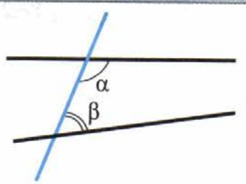
Когда сделаны уроки

Пятый постулат Евклида

В § 6 вы узнали, что в качестве аксиом выбирают очевидные утверждения. Тогда почему бы, например, теоремы 1.1 и 5.1 не включить в список аксиом, ведь они тоже очевидны? Ответ на этот вопрос понятен: если какое-то утверждение можно доказать с помощью аксиом, то это утверждение — теорема, а не аксиома. С этих позиций очень поучительна история, связанная с пятым постулатом Евклида

V постулат. **И чтобы всякий раз, когда прямая при пересечении с двумя другими прямыми образует с ними односторонние углы, сумма которых меньше двух прямых, эти прямые пересекались с той стороны от секущей, с которой эта сумма меньше двух прямых углов** (рис. 223).

Рис. 223



$\alpha + \beta < 180°$

Можно показать, что пятый постулат и сформулированная нами в § 13 аксиома параллельности прямых равносильны, т. е. из постулата следует аксиома и наоборот — из аксиомы следует постулат.

Более двадцати веков многие учёные пытались доказать пятый постулат, т. е. вывести его из других аксиом Евклида. Лишь в начале XIX в. несколько математиков независимо друг от друга пришли к выводу: утверждение, что *через данную точку, не лежащую на данной прямой, можно провести только одну прямую, параллельную данной*, является аксиомой.

Вам может показаться, что в этом выводе ничего особенного нет: присоединяем аксиому параллельности к уже существующему списку аксиом-правил, а дальше доказываем теоремы.

Однако если в футболе добавить только одно правило, например разрешить полевым игрокам играть и руками, то мы получим совершенно новую игру.

Если пятый постулат — это правило, которое мы принимаем, а не теорема, то его можно заменить противоположным утверждением.

Так и поступил Н.И. Лобачевский. Он заменил лишь одно правило — аксиому параллельности прямых — следующим: через точку, не лежащую на данной прямой, проходят по крайней мере две прямые, не пересекающие данную. Новая аксиома позволила построить новую геометрию — неевклидову.

Н.И. Лобачевский (1792–1856)

Выдающийся русский математик, профессор Казанского университета.

С подобной идеей несколько позже выступил венгерский математик Янош Бойяи (1802–1860).

§ 15. Свойства параллельных прямых

Теорема 15.1

(обратная теореме 14.1)

Если две параллельные прямые пересечены секущей, то углы, образующие пару накрест лежащих углов, равны.

Доказательство

На рисунке 224 прямые a и b параллельны, прямая c — секущая. Докажем, что $\angle 1 = \angle 2$.

Пусть $\angle 1 \neq \angle 2$. Тогда через точку K проведём прямую a_1 так, чтобы $\angle 3 = \angle 2$ (рис. 224). Углы 3 и 2 являются накрест лежащими при прямых a_1 и b и секущей c. Тогда по теореме 14.1 $a_1 \parallel b$. Получили, что через точку K проходят две прямые, параллельные прямой b. Это противоречит аксиоме параллельности прямых. Таким образом, наше предположение неверно, и, следовательно, $\angle 1 = \angle 2$. ◄

Теорема 15.2
(обратная теореме 14.3)

Если две параллельные прямые пересечены секущей, то углы, образующие пару соответственных углов, равны.

Доказательство

На рисунке 225 прямые a и b параллельны, прямая c — секущая. Докажем, что $\angle 1 = \angle 2$.

По теореме 15.1 углы 3 и 2 равны как накрест лежащие при параллельных прямых a и b и секущей c. Но углы 3 и 1 равны как вертикальные. Следовательно, $\angle 1 = \angle 2$. ◄

Теорема 15.3
(обратная теореме 14.2)

Если две параллельные прямые пересечены секущей, то сумма углов, образующих пару односторонних углов, равна 180°.

Доказательство

На рисунке 226 прямые a и b параллельны, прямая c — секущая. Докажем, что $\angle 1 + \angle 2 = 180°$.

По теореме 15.1 углы 3 и 2 равны как накрест лежащие при параллельных прямых a и b и секущей c. Но углы 3 и 1 смежные, поэтому $\angle 1 + \angle 3 = 180°$. Следовательно, $\angle 1 + \angle 2 = 180°$. ◄

Рис. 224

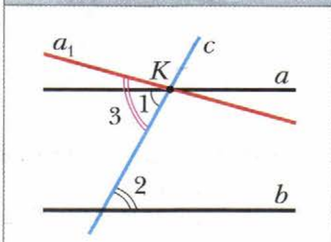


Рис. 225

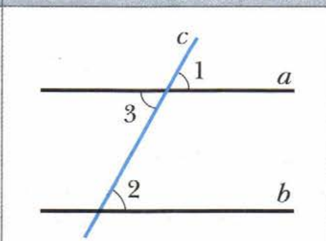
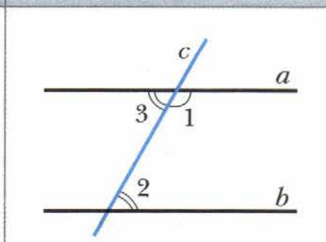


Рис. 226



Следствие

Если прямая перпендикулярна одной из двух параллельных прямых, то она перпендикулярна и другой (рис. 227).

Докажите это следствие самостоятельно.

Задача. Докажите, что все точки одной из двух параллельных прямых равноудалены от другой прямой.

Решение. Пусть прямые a и b параллельны (рис. 228), M и N – две произвольные точки прямой a. Опустим из них перпендикуляры MK и NP на прямую b. Докажем, что $MK = NP$.

Рассмотрим треугольники MKN и PNK. Отрезок KN – их общая сторона. Так как $MK \perp b$ и $NP \perp b$, то $MK \parallel NP$, а углы MKN и PNK равны как накрест лежащие при параллельных прямых MK и NP и секущей KN.

Аналогично углы MNK и PKN равны как накрест лежащие при параллельных прямых MN и KP и секущей KN. Следовательно, треугольники MKN и PNK равны по стороне и двум прилежащим углам.

Тогда $MK = NP$. ◄

Определение

Расстоянием между двумя параллельными прямыми называют расстояние от любой точки одной из прямых до другой прямой.

Например, на рисунке 228 длина отрезка MK – это расстояние между параллельными прямыми a и b.

Рис. 227

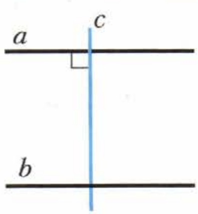


Рис. 228

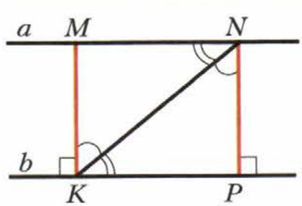
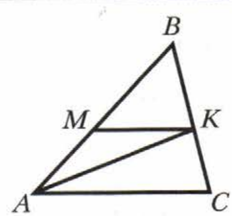


Рис. 229



Задача. На рисунке 229 отрезок AK – биссектриса треугольника ABC, $MK \parallel AC$. Докажите, что треугольник AMK – равнобедренный.

Решение. Так как AK – биссектриса треугольника ABC, то $\angle MAK = \angle KAC$.

Углы KAC и MKA равны как накрест лежащие при параллельных прямых MK и AC и секущей AK. Следовательно, $\angle MAK = \angle MKA$.

Тогда треугольник AMK – равнобедренный. ◄

1. **Каким свойством обладают накрест лежащие углы, образованные при пересечении двух параллельных прямых секущей?**
2. **Каким свойством обладают соответственные углы, образованные при пересечении двух параллельных прямых секущей?**
3. **Чему равна сумма односторонних углов, образованных при пересечении двух параллельных прямых секущей?**
4. **Известно, что прямая перпендикулярна одной из двух параллельных прямых. Обязательно ли она перпендикулярна другой прямой?**
5. **Что называют расстоянием между двумя параллельными прямыми?**

Упражнения

326. На рисунке 230 найдите угол 1.

327. На рисунке 231 найдите угол 2.

Рис. 230

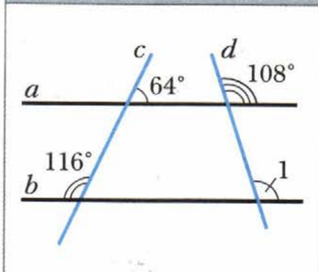


Рис. 231

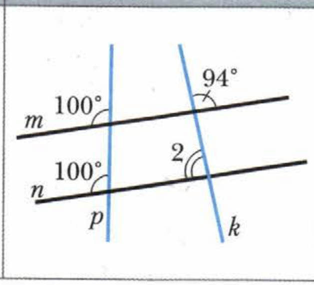
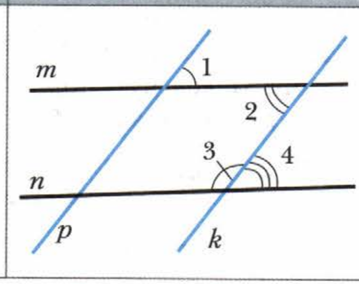


Рис. 232



328. Разность односторонних углов, образованных при пересечении двух параллельных прямых секущей, равна 50°. Найдите эти углы.

329. Один из односторонних углов, образованных при пересечении двух параллельных прямых секущей, в 4 раза больше другого. Найдите эти углы.

330. Найдите все углы, образованные при пересечении двух параллельных прямых секущей, если:

1) один из этих углов равен 48°;

2) отношение градусных мер двух из этих углов равно 2 : 7.

331. Найдите все углы, образованные при пересечении двух параллельных прямых секущей, если один из них на 24° меньше другого.

332. На рисунке 232 $m \parallel n$, $p \parallel k$, $\angle 1 = 50°$. Найдите $\angle 2$, $\angle 3$ и $\angle 4$.

333. Прямая, параллельная основанию AC равнобедренного треугольника ABC, пересекает его боковые стороны AB и BC в точках D и F соответственно. Докажите, что треугольник DBF – равнобедренный.

334. На продолжениях сторон AC и BC треугольника ABC ($AB = BC$) за точки A и B отметили соответственно точки P и K так, что $PK \parallel AB$. Докажите, что треугольник KPC – равнобедренный.

335. Отрезки AB и CD пересекаются в точке O, $AO = BO$, $AC \parallel BD$. Докажите, что $CO = DO$.

336. Отрезки MK и DE пересекаются в точке F, $DK \parallel ME$, $DK = ME$. Докажите, что $\Delta MEF = \Delta DKF$.

337. Ответьте на вопросы.

1) Могут ли оба односторонних угла при двух параллельных прямых и секущей быть тупыми?

2) Может ли сумма накрест лежащих углов при двух параллельных прямых и секущей быть равной 180°?

3) Могут ли быть равными односторонние углы при двух параллельных прямых и секущей?

338. На рисунке 233 $AB \parallel CD$, $BC \parallel AD$. Докажите, что $BC = AD$.

339. На рисунке 233 $BC = AD$, $BC \parallel AD$. Докажите, что $AB \parallel CD$.

340. На рисунке 234 $MK \parallel EF$, $ME = EF$, $\angle KMF = 70°$. Найдите $\angle MEF$.

341. Через вершину B треугольника ABC (рис. 235) провели прямую MK, параллельную прямой AC, $\angle MBA = 42°$, $\angle CBK = 56°$. Найдите углы треугольника ABC.

Рис. 233

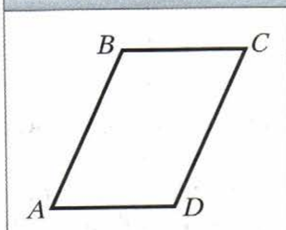


Рис. 234

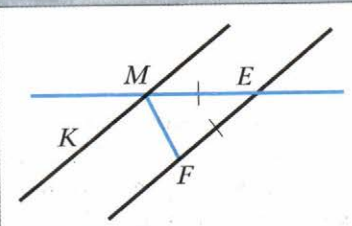
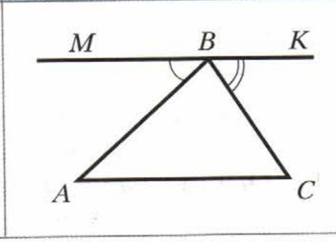


Рис. 235



342. Прямая, проведённая через вершину A треугольника ABC параллельно его противолежащей стороне, образует со стороной AC угол, равный углу BAC. Докажите, что данный треугольник – равнобедренный.

343. На рисунке 236 $\angle MAB = 50°$, $\angle ABK = 130°$, $\angle ACB = 40°$, CE – биссектриса угла ACD. Найдите углы треугольника ACE.

344. На рисунке 237 $BE \perp AK$, $CF \perp AK$, CK – биссектриса угла FCD, $\angle ABE = 32°$. Найдите $\angle ACK$.

Рис. 236

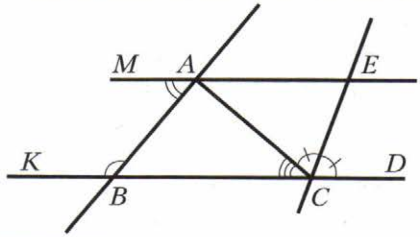
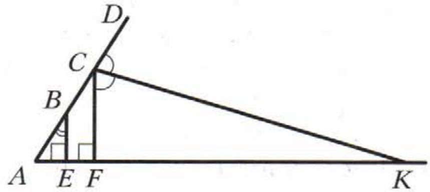


Рис. 237



345. На рисунке 238 $BC \parallel MK$, $BK = KE$, $CK = KD$. Докажите, что $AD \parallel MK$.

346. На рисунке 239 $AB = AC$, $AF = FE$, $AB \parallel EF$. Докажите, что $AE \perp BC$.

347. Треугольник ABC – равнобедренный с основанием AC. Через произвольную точку M его биссектрисы BD проведены прямые, параллельные его сторонам AB и BC и пересекающие отрезок AC в точках E и F соответственно. Докажите, что $DE = DF$.

Рис. 238

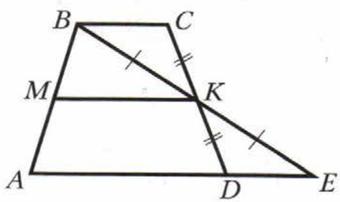
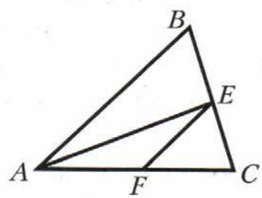


Рис. 239



348. На рисунке 240 $AB \parallel DE$. Докажите, что $\angle BCD = \angle ABC + \angle CDE$.

349. На рисунке 241 $AB \parallel DE$, $\angle ABC = 120°$, $\angle CDE = 150°$. Докажите, что $BC \perp CD$.

Рис. 240

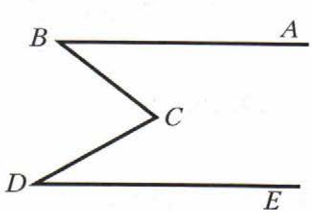
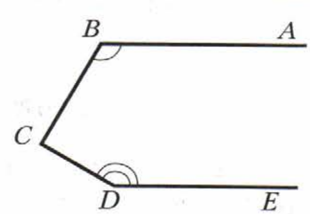


Рис. 241



350. Через вершину B треугольника ABC провели прямую, параллельную его биссектрисе AM. Эта прямая пересекает прямую AC в точке K. Докажите, что ΔBAK – равнобедренный.

351. Через точку O пересечения биссектрис AE и CF треугольника ABC провели прямую, параллельную прямой AC. Эта прямая пересекает сторону AB в точке M, а сторону BC – в точке K. Докажите, что $MK = AM + CK$.

352. Биссектрисы углов BAC и BCA треугольника ABC пересекаются в точке O. Через эту точку проведены прямые, параллельные прямым AB и BC и пересекающие сторону AC в точках M и K соответственно. Докажите, что периметр треугольника MOK равен длине стороны AC.

Упражнения для повторения

353. На отрезке AB отметили точку C так, что $AC : BC = 2 : 1$. На отрезке AC отметили точку D так, что $AD : CD = 3 : 2$. В каком отношении точка D делит отрезок AB?

354. Отрезки AC и BD пересекаются в точке O, $AB = BC = CD = AD$. Докажите, что $AC \perp BD$.

355. В треугольнике MOE на стороне MO отметили точку A, в треугольнике TPK на стороне TP – точку B так, что $MA = TB$. Какова градусная мера угла BKP, если $MO = TP$, $\angle M = \angle T$, $\angle O = \angle P$, $\angle AEO = 17°$?

Наблюдайте, рисуйте, конструируйте, фантазируйте

356. На рисунке 242 изображена очень сложная замкнутая ломаная. Она ограничивает некоторую часть плоскости (многоугольник). Как, отметив на рисунке любую точку, по возможности быстрее определить, принадлежит эта точка многоугольнику или нет?

Рис. 242

§ 16. Сумма углов треугольника

Треугольник – ключевая фигура планиметрии. Мир треугольников разнообразен. Но всем им присуще свойство, которое раскрывает следующая теорема.

Теорема 16.1

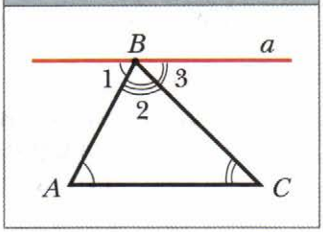
Сумма углов треугольника равна 180°.

Доказательство

Рассмотрим произвольный треугольник ABC. Требуется доказать, что $\angle A + \angle B + \angle C = 180°$.

Через вершину B проведём прямую a, параллельную прямой AC (рис. 243). Имеем: $\angle A$ и $\angle 1$ равны как накрест лежащие при параллельных прямых a и AC и секущей AB. Аналогично доказываем, что $\angle C = \angle 3$. Но углы 1, 2, 3 составляют развёрнутый угол с вершиной B. Следовательно, $\angle A + \angle ABC + \angle C = \angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = 180°$. ◄

Рис. 243



Следствие

Среди углов треугольника хотя бы два угла острые.

Докажите это следствие самостоятельно.

Из этого следствия вытекает, что угол при основании равнобедренного треугольника всегда острый.

Определение

Внешним углом треугольника называют угол, смежный с углом этого треугольника.

На рисунке 244 углы 1, 2, 3 являются внешними углами треугольника ABC.

Теорема 16.2

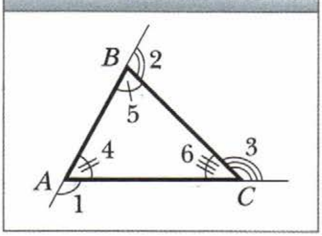
Внешний угол треугольника равен сумме двух углов треугольника, не смежных с ним.

Доказательство

На рисунке 244 углы 1, 2 и 3 — внешние углы треугольника ABC. Надо доказать, что $\angle 1 = \angle 5 + \angle 6$, $\angle 2 = \angle 4 + \angle 6$, $\angle 3 = \angle 4 + \angle 5$.

Докажем, например, первое из этих трёх равенств (остальные равенства доказывают аналогично).

Рис. 244



По свойству смежных углов $\angle 1 + \angle 4 = 180°$. По теореме о сумме углов треугольника $\angle 4 + \angle 5 + \angle 6 = 180°$. Тогда $\angle 1 + \angle 4 = \angle 4 + \angle 5 + \angle 6$, отсюда $\angle 1 = \angle 5 + \angle 6$. ◂

Следствие

Внешний угол треугольника больше каждого из углов треугольника, не смежных с ним.

Докажите это следствие самостоятельно.

Теорема 16.3
(неравенство треугольника)

Каждая сторона треугольника меньше суммы двух других его сторон.

Доказательство

Рассмотрим треугольник ABC (рис. 245). Надо доказать, что: 1) $AB < AC + CB$; 2) $AC < AB + BC$; 3) $BC < BA + AC$.

Докажем первое из этих неравенств (два других доказывают аналогично).

Пусть доказываемое неравенство неверно. Тогда $AB > AC + CB$ или $AB = AC + CB$.

1) Пусть $AB > AC + CB$. Тогда на стороне AB можно отметить точки C_1 и C_2 такие, что $AC = AC_1$ и $BC = BC_2$. Поскольку мы предположили, что $AB > AC + CB$, то $AB > AC_1 + BC_2$. Следовательно, отрезки AC_1 и BC_2 не имеют общих точек (см. рис. 245).

Углы AC_1C и BC_2C являются острыми как углы при основании равнобедренных треугольников AC_1C и BC_2C соответственно. Тогда углы 1 и 2 являются тупыми как углы, смежные с острыми. Получили противоречие: в треугольнике C_1CC_2 два тупых угла.

2) Рассуждая аналогично, можно показать (сделайте это самостоятельно), что равенство $AB = AC + CB$ тоже приводит к противоречию. ◂

Рис. 245

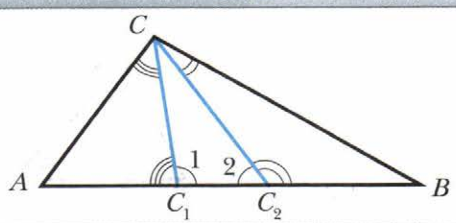
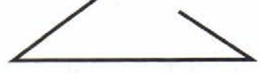


Рис. 246



Из доказанной теоремы следует, что *если длина одного из трёх данных отрезков не меньше суммы длин двух других, то эти отрезки не могут служить сторонами треугольника* (рис. 246).

В § 23 вы узнаете, что если любой из трёх данных отрезков меньше суммы двух других, то эти отрезки могут служить сторонами треугольника.

Вы уже знаете, что в треугольнике против равных сторон лежат равные углы, и наоборот, против равных углов лежат равные стороны (§ 9, 10). Эти свойства дополняет следующая теорема.

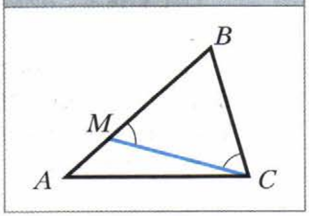
Теорема 16.4

В треугольнике против большей стороны лежит больший угол, и наоборот, против большего угла лежит бóльшая сторона.

Доказательство

1) Рассмотрим треугольник ABC, у которого $AB > BC$. Надо доказать, что $\angle ACB > \angle A$ (рис. 247).

Рис. 247



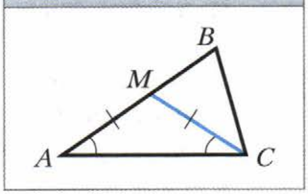
Поскольку $AB > BC$, то на стороне AB найдётся такая точка M, что $BM = BC$. Получили равнобедренный треугольник MBC, в котором $\angle BMC = \angle BCM$.

Так как угол BMC – внешний угол треугольника AMC, то $\angle BMC > \angle A$. Следующая «цепочка» доказывает первую часть теоремы:

$\angle ACB > \angle MCB = \angle BMC > \angle A$.

2) Рассмотрим треугольник ABC, у которого $\angle C > \angle A$. Надо доказать, что $AB > BC$.

Рис. 248



Поскольку $\angle ACB > \angle A$, то угол ACB можно разделить на два угла ACM и MCB так, что $\angle ACM = \angle A$ (рис. 248). Тогда треугольник AMC – равнобедренный с равными сторонами MA и MC.

Для стороны BC запишем неравенство треугольника: $MB + MC > BC$. Учитывая, что $MA = MC$ и $MB + MA = AB$, получим: $AB > BC$. ◄

Заметим, что вторую часть теоремы 16.4 можно доказать методом от противного: предположить, что $BC \geq AB$, а далее воспользоваться уже доказанной первой частью теоремы. Проведите это доказательство самостоятельно.

Задача. Медиана CM треугольника ABC равна половине стороны AB. Докажите, что треугольник ABC – прямоугольный.

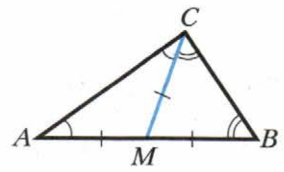
Решение. По условию $AM = CM$ (рис. 249). Тогда в треугольнике AMC углы A и ACM равны.

По условию $BM = CM$, и в треугольнике BMC углы B и BCM равны.

В треугольнике ACB имеем: $\angle A + \angle B + \angle ACB = 180°$. Учитывая, что $\angle A = \angle ACM$ и $\angle B = \angle BCM$, получаем: $\angle ACM + \angle BCM + \angle ACB = 180°$. Так как $\angle ACM + \angle BCM = \angle ACB$, то $2\angle ACB = 180°$. Тогда $\angle ACB = 90°$.

Следовательно, треугольник ABC – прямоугольный. ◄

Рис. 249



1. Чему равна сумма углов треугольника?
2. Какое наименьшее количество острых углов есть в любом треугольнике?
3. Какой угол называют внешним углом треугольника?
4. Как связаны внешний угол треугольника и два угла треугольника, не смежные с ним?
5. Сравните внешний угол треугольника с углом треугольника, не смежным с ним.
6. Сформулируйте теорему о неравенстве треугольника.
7. Сформулируйте теорему о соотношении между сторонами и углами треугольника.

Упражнения

357. Найдите угол треугольника, если два других его угла равны 35° и 96°.

358. Один из углов треугольника в 3 раза меньше другого угла и на 35° меньше третьего. Найдите углы треугольника.

359. Найдите углы треугольника, если их градусные меры относятся как 2 : 3 : 7.

360. Найдите углы равностороннего треугольника.

361. Найдите углы равнобедренного прямоугольного треугольника.

362. Угол при основании равнобедренного треугольника равен 63°. Найдите угол при вершине этого треугольника.

363. Найдите углы при основании равнобедренного треугольника, если угол при вершине равен 104°.

364. Найдите углы равнобедренного треугольника, если угол при вершине в 4 раза больше угла при основании.

365. Найдите углы равнобедренного треугольника, если угол при основании на 48° меньше угла при вершине.

366. Найдите углы равнобедренного треугольника, если один из них равен: 1) 110°; 2) 50°. Сколько решений имеет задача?

367. Найдите углы равнобедренного треугольника, если один из них равен: 1) 42°; 2) 94°. Сколько решений имеет задача?

368. Могут ли стороны треугольника быть равными:
1) 6 см, 5 см, 12 см; 2) 6 см, 5 см, 11 см?

369. В треугольнике ABC известно, что $\angle C = 90°$, AK – биссектриса, $\angle BAK = 18°$. Найдите углы AKC и ABC.

370. В треугольнике ABC известно, что $AB = BC$, CK – биссектриса, $\angle A = 66°$. Найдите $\angle AKC$.

371. Биссектрисы AK и CM треугольника ABC пересекаются в точке O, $\angle BAC = 116°$, $\angle BCA = 34°$. Найдите $\angle AOC$.

372. В равнобедренном треугольнике ABC с углом при вершине B, равным 36°, провели биссектрису AD. Докажите, что треугольники ADB и CAD – равнобедренные.

373. В треугольнике ABC провели биссектрису BF. Найдите угол C, если $\angle A = 39°$, $\angle AFB = 78°$.

374. Докажите, что если один из углов треугольника равен сумме двух других углов, то этот треугольник – прямоугольный.

375. На рисунке 250 укажите внешние углы:
1) при вершинах E и F треугольника MEF;
2) при вершине E треугольника MKE.

376. На рисунке 251 укажите треугольники, для которых внешним углом является: 1) угол AMB; 2) угол BMD.

Рис. 250

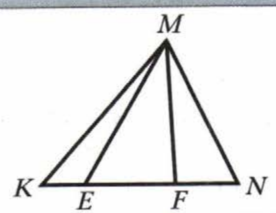
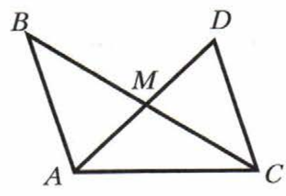


Рис. 251



377. Один из внешних углов треугольника равен 75°. Чему равны:
1) угол треугольника при этой вершине;
2) сумма двух углов треугольника, не смежных с ним?

378. Может ли внешний угол треугольника быть меньше смежного с ним угла треугольника? В случае положительного ответа укажите вид треугольника.

379. Определите вид треугольника, если один из его внешних углов равен смежному с ним углу треугольника.

380. Один из внешних углов треугольника равен 136°, а один из углов треугольника, не смежный с ним, — 61°. Найдите второй угол треугольника, не смежный с данным внешним.

381. Один из внешних углов треугольника равен 154°. Найдите углы треугольника, не смежные с ним, если один из этих углов на 28° больше другого.

382. Один из внешних углов треугольника равен 98°. Найдите углы треугольника, не смежные с ним, если один из этих углов в 6 раз меньше другого.

383. Найдите углы равнобедренного треугольника, если внешний угол при его вершине равен 38°.

384. Сравните углы треугольника ABC, если:
1) $AB > AC > BC$; 2) $AB = BC$, $BC > AC$.

385. В треугольнике ABC известно, что $\angle A = 34°$, $\angle B = 28°$. Сравните стороны AB, BC и AC.

386. Сравните стороны треугольника ABC, если:
1) $\angle C > \angle A > \angle B$; 2) $\angle B > \angle C$, $\angle A = \angle B$.

387. Докажите, что если два угла одного треугольника равны соответственно двум углам другого треугольника, то и третьи углы этих треугольников равны.

388. Найдите углы равнобедренного треугольника, если один из его внешних углов равен: 1) 54°; 2) 112°. Сколько решений имеет задача?

389. Внешний угол равнобедренного треугольника равен 130°. Найдите углы треугольника. Сколько решений имеет задача?

390. Периметр треугольника равен 30 см. Может ли одна из его сторон быть равной: 1) 20 см; 2) 15 см?

391. Длины двух сторон треугольника равны 7 и 9 см. Может ли периметр этого треугольника быть равным: 1) 20 см; 2) 32 см; 3) 18 см?

392. Существует ли треугольник, одна из сторон которого на 2 см меньше второй и на 6 см меньше третьей, а периметр равен 20 см?

393. Биссектрисы углов при основании AC равнобедренного треугольника ABC пересекаются в точке O. Докажите, что угол AOC равен внешнему углу треугольника ABC при вершине A.

394. На рисунке 252 $BC \parallel AD$, $\angle A = 25°$, $\angle B = 55°$. Найдите угол CMD.

395. Отрезок BK — биссектриса равнобедренного треугольника ABC с основанием BC, $\angle AKB = 105°$. Найдите углы треугольника ABC.

396. На стороне AB треугольника ABC отметили точку D так, что $BD = BC$, $\angle ACD = 15°$, $\angle DCB = 40°$. Найдите углы треугольника ABC.

397. На сторонах треугольника ABC (рис. 253) отметили точки E и F так, что $\angle 1 = \angle 2$. Докажите, что $\angle 3 = \angle 4$.

Рис. 252

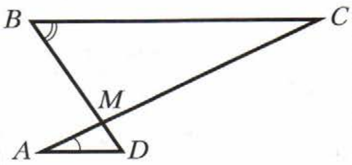


Рис. 253

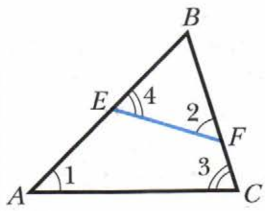
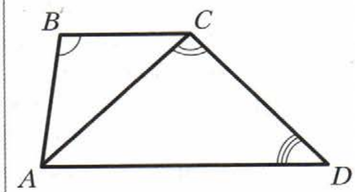


Рис. 254



398. На рисунке 254 $BC \parallel AD$, $\angle B = 100°$, $\angle ACD = 95°$, $\angle D = 45°$. Докажите, что $AB = BC$.

399. Через вершину C треугольника ABC проведена прямая, параллельная биссектрисе AM треугольника и пересекающая прямую AB в точке K. Найдите углы треугольника AKC, если $\angle BAC = 70°$.

400. В треугольнике ABC биссектрисы углов A и C пересекаются в точке O. Найдите $\angle AOC$, если $\angle B = 100°$.

401. Докажите, что биссектриса внешнего угла при вершине равнобедренного треугольника параллельна его основанию.

402. Докажите, что если биссектриса внешнего угла треугольника параллельна его стороне, то этот треугольник равнобедренный.

403. Угол при основании AC равнобедренного треугольника ABC в 2 раза больше угла при вершине, AM – биссектриса треугольника. Докажите, что $BM = AC$.

404. Треугольник ABC равнобедренный с основанием AC. На стороне BC отметили точку M так, что $BM = AM = AC$. Найдите углы треугольника ABC.

405. Докажите, что в любом треугольнике существует угол: 1) не меньше $60°$; 2) не больше $60°$.

406. Определите вид треугольника, если:

1) один из его углов больше суммы двух других;

2) любой из его углов меньше суммы двух других.

407. Определите вид треугольника, если сумма любых двух его углов больше $90°$.

408. В треугольнике ABC угол B – тупой. На продолжении стороны AB за точку A отметили произвольную точку D. Докажите, что $CD > AC$.

409. В треугольнике ABC известно, что $\angle C > 90°$. На стороне BC отметили произвольную точку D. Докажите, что $AD > AC$.

410. Существует ли треугольник, две биссектрисы которого перпендикулярны?

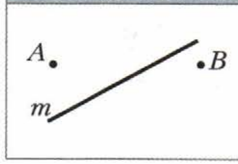
411. Существует ли треугольник, в котором одна биссектриса делит пополам другую биссектрису?

412. Найдите углы треугольника ABC, если биссектриса угла B разбивает его на два равнобедренных треугольника.

413. Три точки A, B и C таковы, что выполняется равенство $AB = AC + CB$. Докажите, что точка C является внутренней точкой отрезка AB.

414. На прямой m (рис. 255) найдите такую точку C, чтобы сумма расстояний от неё до точек A и B была наименьшей. Ответ обоснуйте.

Рис. 255



415. Одна сторона треугольника равна 2,8 см, а вторая – 0,6 см. Найдите третью сторону этого треугольника, если её длина, выраженная в сантиметрах, равна целому числу.

416. В треугольнике ABC известно, что $\angle A = \alpha$, биссектрисы внешних углов при вершинах B и C пересекаются в точке O. Найдите $\angle BOC$.

417. Отрезок AM – медиана треугольника ABC, $\angle CAM > \angle BAM$. Докажите, что $AB > AC$.

418. На боковых сторонах AB и BC равнобедренного треугольника ABC отметили соответственно точки E и F так, что $AC = AF = EF = BE$. Найдите углы треугольника ABC.

419. В треугольнике ABC известно, что $AB = 2$ см, $\angle A = 60°$, $\angle B = 70°$. На стороне AC отметили точку D так, что $AD = 1$ см. Найдите углы треугольника BDC.

420. Докажите, что сумма длин двух сторон треугольника больше удвоенной длины медианы, проведённой к третьей стороне.

Упражнения для повторения

421. На прямой отметили точки A, B и C так, что точка B лежит между точками A и C и $BC = 2AB$. На отрезке BC отметили точку D так, что $BD : DC = 3 : 7$. Найдите расстояние между серединами отрезков AB и CD, если отрезок CD на 16 см длиннее отрезка BD.

422. На медиане BM треугольника ABC отметили точку O так, что $\angle OAC = \angle OCA$. Докажите, что треугольник ABC – равнобедренный.

Наблюдайте, рисуйте, конструируйте, фантазируйте

423. Существует ли шестиугольник, у которого никакие две диагонали не имеют общих точек, отличных от вершин?

§ 17. Прямоугольный треугольник

На рисунке 256 изображён прямоугольный треугольник ABC, у которого $\angle C = 90^\circ$.

Сторону прямоугольного треугольника, противолежащую прямому углу, называют **гипотенузой**, а стороны, прилежащие к прямому углу, — **катетами** (см. рис. 256).

Для доказательства равенства двух треугольников находят их равные элементы. У любых двух прямоугольных треугольников такие элементы есть всегда — это прямые углы. Поэтому для прямоугольных треугольников можно сформулировать «персональные» признаки равенства.

Теорема 17.1

(признак равенства прямоугольных треугольников по гипотенузе и катету)

Если гипотенуза и катет одного прямоугольного треугольника соответственно равны гипотенузе и катету другого, то такие треугольники равны.

Доказательство

Рассмотрим треугольники ABC и $A_1B_1C_1$, у которых $\angle C = \angle C_1 = 90^\circ$, $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$ (рис. 257). Надо доказать, что $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$.

Расположим треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ так, чтобы вершина A совместилась с вершиной A_1, вершина C — с вершиной C_1, а точки B и B_1 лежали в разных полуплоскостях относительно прямой A_1C_1 (рис. 258).

Имеем: $\angle A_1C_1B + \angle A_1C_1B_1 = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$. Значит, угол BC_1B_1 — развёрнутый, т. е. точки B, C_1, B_1 лежат на одной прямой. Получили равнобедренный треугольник BA_1B_1 с боковыми сторонами A_1B и A_1B_1 и высотой A_1C_1 (рис. 258). Тогда A_1C_1 — медиана этого треугольника, т. е. $C_1B = C_1B_1$. Следовательно, треугольники A_1BC_1 и $A_1B_1C_1$ равны по третьему признаку равенства треугольников. ◄

Рис. 256

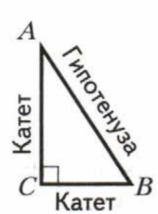


Рис. 257

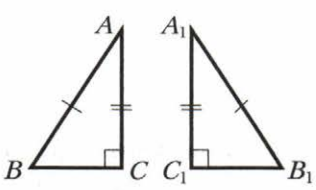
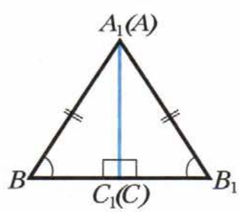


Рис. 258



При решении задач удобно пользоваться и другими признаками равенства прямоугольных треугольников, непосредственно вытекающими из признаков равенства треугольников.

Признак равенства прямоугольных треугольников по двум катетам

Если катеты одного прямоугольного треугольника соответственно равны катетам другого, то такие треугольники равны.

Признак равенства прямоугольных треугольников по катету и прилежащему острому углу

Если катет и прилежащий к нему острый угол одного прямоугольного треугольника соответственно равны катету и прилежащему к нему острому углу другого, то такие треугольники равны.

Очевидно, что если острый угол одного прямоугольного треугольника равен острому углу другого прямоугольного треугольника, то равны и два других острых угла. Воспользовавшись этим утверждением, список признаков равенства прямоугольных треугольников можно дополнить ещё двумя признаками.

Признак равенства прямоугольных треугольников по катету и противолежащему острому углу

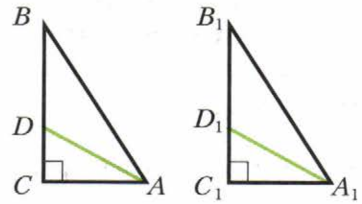
Если катет и противолежащий ему острый угол одного прямоугольного треугольника соответственно равны катету и противолежащему ему острому углу другого, то такие треугольники равны.

Признак равенства прямоугольных треугольников по гипотенузе и острому углу

Если гипотенуза и острый угол одного прямоугольного треугольника соответственно равны гипотенузе и острому углу другого, то такие треугольники равны.

Задача. Докажите равенство прямоугольных треугольников по острому углу и биссектрисе, проведённой из вершины этого угла.

Рис. 259



Решение. В треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ (рис. 259) $\angle C = \angle C_1 = 90°$, $\angle BAC = \angle B_1A_1C_1$, отрезки AD и A_1D_1 – биссектрисы, $AD = A_1D_1$.

Имеем: $\angle CAD = \frac{1}{2}\angle BAC = \frac{1}{2}\angle B_1A_1C_1 = \angle C_1A_1D_1$. Поскольку $AD = A_1D_1$, то прямоугольные треугольники ACD и $A_1C_1D_1$ равны по гипотенузе и острому углу. Отсюда $AC = A_1C_1$, и так как $\angle BAC = \angle B_1A_1C_1$, то прямоугольные треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны по катету и прилежащему острому углу. ◄

1. Какой треугольник называют прямоугольным?
2. Какую сторону прямоугольного треугольника называют гипотенузой?
3. Какую сторону прямоугольного треугольника называют катетом?
4. Сформулируйте признак равенства прямоугольных треугольников по гипотенузе и катету.
5. Сформулируйте признак равенства прямоугольных треугольников по двум катетам.
6. Сформулируйте признак равенства прямоугольных треугольников по катету и прилежащему острому углу.
7. Сформулируйте признак равенства прямоугольных треугольников по катету и противолежащему острому углу.
8. Сформулируйте признак равенства прямоугольных треугольников по гипотенузе и острому углу.

Практические задания

424. С помощью транспортира и линейки постройте прямоугольный треугольник:
1) катеты которого равны 3 см и 4 см;
2) один из катетов которого равен 2,5 см, а прилежащий к нему угол – 40°;
3) гипотенуза которого равна 6 см, а один из острых углов – 70°.
Обозначьте построенные треугольники, укажите в каждом из них катеты и гипотенузу.

425. С помощью транспортира и линейки постройте равнобедренный прямоугольный треугольник:

1) с катетом, равным 5 см;
2) с гипотенузой, равной 4 см.

Упражнения

426. На рисунке 260 изображён треугольник MKE с прямым углом при вершине K. Укажите: 1) катеты и гипотенузу треугольника; 2) катет, прилежащий к углу E; 3) катет, противолежащий углу M.

427. На рисунке 261 AD – высота треугольника ABC. Найдите на этом рисунке прямоугольные треугольники, укажите в каждом из них катеты и гипотенузу.

428. Один из острых углов прямоугольного треугольника равен 43°. Найдите второй острый угол.

429. В равнобедренном треугольнике ABC ($AB = BC$) проведена высота AH. Найдите угол CAH, если $\angle B = 76°$.

430. Угол между основанием равнобедренного треугольника и высотой, проведённой к боковой стороне, равен 19°. Найдите углы данного треугольника.

431. На рисунке 262 $AB \perp BC$, $CD \perp BC$, $AC = BD$. Докажите, что $AB = CD$.

Рис. 260

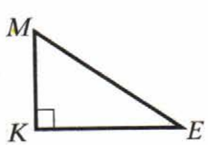


Рис. 261

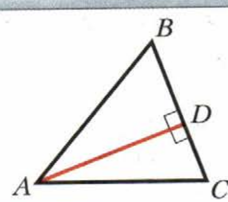
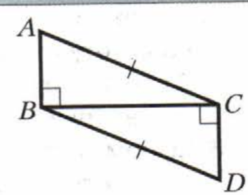


Рис. 262



432. На рисунке 263 $MO = FO$, $\angle MEO = \angle FKO = 90°$. Докажите, что $\triangle MEO = \triangle FKO$.

Рис. 263

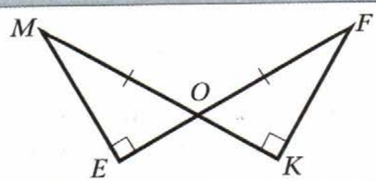
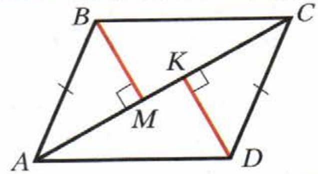


Рис. 264

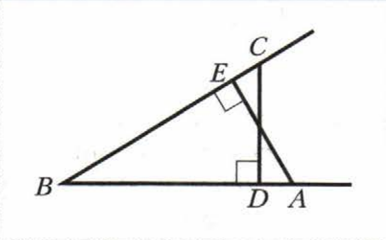


433. Из точек A и B, лежащих в одной полуплоскости относительно прямой a, опущены перпендикуляры AM и BK на эту прямую, $AM = BK$. Докажите, что $AK = BM$.

434. На рисунке 264 $AB = CD$, $AB \parallel CD$, $BM \perp AC$, $DK \perp AC$. Докажите, что $BM = DK$.

435. На рисунке 265 $AB = BC$, $CD \perp AB$, $AE \perp BC$. Докажите, что $BE = BD$.

Рис. 265



436. На биссектрисе угла с вершиной в точке B отметили точку M, из которой опустили перпендикуляры MD и MC на стороны угла. Докажите, что $MD = MC$.

437. На сторонах угла с вершиной в точке B отметили точки A и C так, что $AB = BC$. Через точки A и C провели прямые, перпендикулярные сторонам BA и BC соответственно, которые пересекаются в точке O. Докажите, что луч BO — биссектриса угла ABC.

438. Докажите, что высоты равнобедренного треугольника, проведённые к его боковым сторонам, равны.

439. Докажите, что если две высоты треугольника равны, то этот треугольник является равнобедренным.

440. Докажите равенство прямоугольных треугольников по катету и биссектрисе, проведённой из вершины прямого угла.

441. Докажите равенство прямоугольных треугольников по катету и высоте, проведённой из вершины прямого угла.

442. Докажите равенство прямоугольных треугольников по катету и биссектрисе, проведённой из вершины прилежащего к этому катету острого угла.

443. Докажите равенство прямоугольных треугольников по катету и медиане, проведённой к другому катету.

444. Докажите, что в равных треугольниках высóты, опущенные на соответственно равные стороны, равны.

445. Докажите равенство остроугольных треугольников по стороне и двум высотам, проведённым из концов этой стороны.

446. Докажите равенство треугольников по стороне и проведённым к ней медиане и высоте.

447. Прямая пересекает стороны AB и BC треугольника ABC соответственно в точках M и K, являющихся серединами этих сторон. Докажите, что вершины данного треугольника равноудалены от прямой MK.

448. Прямая пересекает стороны AB и BC треугольника ABC в точках M и K соответственно. Вершины данного треугольника равноудалены от прямой MK. Докажите, что точки M и K являются серединами сторон AB и BC соответственно.

449. Высоты AM и CK треугольника ABC пересекаются в точке H, $HK = HM$. Докажите, что треугольник ABC – равнобедренный.

450. Высоты ME и NF треугольника MKN пересекаются в точке O, $OM = ON$, $MF = KE$. Докажите, что треугольник MKN – равносторонний.

451. Можно ли утверждать, что если две стороны и высота, проведённая к третьей стороне, одного треугольника соответственно равны двум сторонам и высоте, проведённой к третьей стороне, другого треугольника, то эти треугольники равны?

452. Докажите равенство треугольников по двум углам и высоте, проведённой из вершины третьего угла.

Упражнения для повторения

453. Углы ABC и DBC – смежные, луч BM принадлежит углу ABC, луч BK – углу DBC, $\angle MBC = \angle CBK = 30°$, угол DBK в 5 раз больше угла ABM. Найдите углы ABC и DBC.

454. На боковых сторонах AB и BC равнобедренного треугольника ABC отметили соответственно точки M и K так, что $BM = BK$. Отрезки AK и CM пересекаются в точке O. Докажите, что: 1) треугольник AOC – равнобедренный; 2) прямая BO – серединный перпендикуляр отрезка AC.

455. На рисунке 266 $AB = CD$, $BC = AD$. Докажите, что $AO = OC$.

Наблюдайте, рисуйте, конструируйте, фантазируйте

456. Можно ли замостить плоскость фигурами, изображёнными на рисунке 267?

Рис. 266

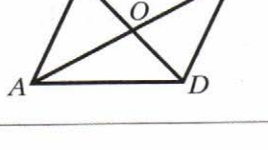
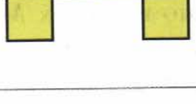


Рис. 267



§ 18. Свойства прямоугольного треугольника

Теорема 18.1

В прямоугольном треугольнике гипотенуза больше катета.

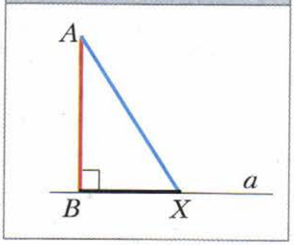
Доказательство

Каждый из катетов лежит против острого угла, а гипотенуза лежит против прямого угла. Прямой угол больше острого угла, следовательно, в силу теоремы 16.4 гипотенуза больше любого из катетов. ◄

Следствие

Если из одной точки, не лежащей на прямой, к этой прямой проведены перпендикуляр и наклонная, то перпендикуляр меньше наклонной.

Рис. 268

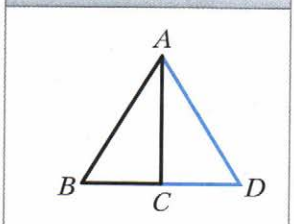


На рисунке 268 отрезок AB – перпендикуляр, отрезок AX – наклонная, $AB < AX$.

Задача 1. Докажите, что катет, лежащий против угла, величина которого равна 30°, равен половине гипотенузы.

Решение. Рассмотрим треугольник ABC, в котором $\angle ACB = 90°$, $\angle BAC = 30°$. Надо доказать, что $BC = \frac{1}{2}AB$.

Рис. 269



На луче BC отложим отрезок CD, равный отрезку BC (рис. 269). Тогда треугольники ABC и ADC равны по двум катетам. Действительно, стороны BC и CD равны по построению, AC – общая сторона этих треугольников, $\angle ACB = \angle ACD = 90°$. Тогда $\angle DAC = 30°$. Отсюда $\angle BAD = \angle ABD = 60°$. Следовательно, $\angle ADB = 60°$ и треугольник ABD – равносторонний. Значит, $BC = \frac{1}{2}BD = \frac{1}{2}AB$. ◄

Задача 2. Докажите, что если катет равен половине гипотенузы, то угол, лежащий против этого катета, равен 30°.

Решение. Рассмотрим треугольник ABC, в котором $\angle ACB = 90°$, $BC = \frac{1}{2}AB$. Надо доказать, что $\angle BAC = 30°$.

На луче BC отложим отрезок CD, равный отрезку BC (см. рис. 269). Тогда $AB = BD$. Кроме того, отрезок AC является медианой и высотой треугольника BAD, следовательно, по признаку равнобедренного треугольника $AB = AD$. Получаем, что $AB = BD = AD$ и треугольник BAD – равносторонний, $\angle BAD = 60°$.

Так как отрезок AC – биссектриса треугольника BAD, то $\angle BAC = \frac{1}{2}\angle BAD = 30°$. ◄

1. Какая из сторон прямоугольного треугольника является наибольшей?
2. Каково свойство катета, лежащего против угла, равного 30°?
3. Какова градусная мера угла, лежащего против катета, равного половине гипотенузы?

Упражнения

457. Стороны прямоугольного треугольника равны 24 см, 10 см и 26 см. Чему равен наибольший катет данного треугольника?

458. В прямоугольном треугольнике DEF гипотенуза DE равна 18 см, $\angle D = 30°$. Найдите катет FE.

459. В прямоугольном треугольнике MKC известно, что $\angle M = 90°$, $\angle C = 60°$, $CM = 7$ см. Найдите гипотенузу CK.

460. В равностороннем треугольнике ABC точка D – середина стороны AB. Из этой точки опущен перпендикуляр DE на сторону AC. Найдите отрезки, на которые точка E разбивает отрезок AC, если сторона данного треугольника равна 16 см.

461. Один из углов прямоугольного треугольника равен 30°, а разность гипотенузы и меньшего катета – 5 см. Найдите эти стороны треугольника.

462. В треугольнике ABC известно, что $\angle A = 30°$, $\angle B = 45°$, CK – высота, $AC = 10$ см. Найдите отрезок BK.

463. В треугольнике ABC известно, что $\angle C = 90°$, $\angle A = 30°$, CD – высота, $BD = 7$ см. Найдите гипотенузу AB.

464. В треугольнике ABC известно, что $\angle C = 90°$, CK – высота, $CK = 7$ см, $AC = 14$ см. Найдите $\angle B$.

465. На рисунке 270 AB – перпендикуляр, AC – наклонная, $AC = 2$ см. Найдите угол ACB и длину перпендикуляра AB, если эта длина, выраженная в сантиметрах, равна целому числу.

466. Основание равнобедренного треугольника равно 18 см, а один из углов – 120°. Найдите высоту треугольника, проведённую из вершины угла при его основании.

467. В равнобедренном треугольнике ABC с основанием BC провели высоту BM, $BM = 7{,}5$ см, $\angle MBC = 15°$. Найдите боковую сторону треугольника.

468. Биссектрисы AM и BK равностороннего треугольника ABC пересекаются в точке O. Докажите, что $AO : OM = 2 : 1$.

469. В треугольнике ABC известно, что $\angle C = 90°$, $\angle B = 30°$. Серединный перпендикуляр отрезка AB пересекает его в точке M, а отрезок BC – в точке K. Докажите, что $MK = \frac{1}{3} BC$.

470. В треугольнике MKE известно, что $\angle K = 90°$, $\angle E = 30°$, $KE = 12$ см. Найдите биссектрису MC треугольника.

471. В треугольнике ABC известно, что $\angle C = 90°$, $\angle BAC = 60°$, отрезок AD – биссектриса, отрезок CD на 3 см меньше отрезка BD. Найдите биссектрису AD.

Упражнения для повторения

472. На рисунке 271 $AB = BC$, $AM = KC$, $\angle AKE = \angle FMC$. Докажите, что треугольник FBE – равнобедренный.

473. Через вершины A и B треугольника ABC проведены прямые, перпендикулярные биссектрисе угла ACB и пересекающие прямые BC и AC в точках M и K соответственно. Найдите периметр треугольника ABC, если $AC > BC$, $CM = 6$ см, $BK = 2$ см, $AB = 7$ см.

474. На рисунке 272 $BC \parallel AD$, луч CA – биссектриса угла BCD, $AD = 9$ см, $AC = 8$ см. Найдите периметр треугольника CAD.

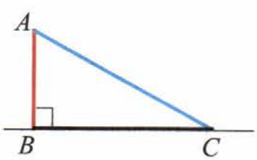


Рис. 270

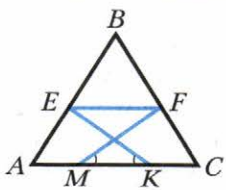


Рис. 271

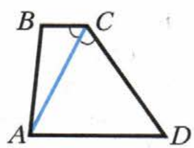


Рис. 272

Наблюдайте, рисуйте, конструируйте, фантазируйте

475. Разрежьте треугольник на четыре части так, чтобы, перевернув три из них, можно было сложить треугольник, равный данному.

Задание № 3 «Проверьте себя» в тестовой форме

1. Какое из следующих утверждений верно?

А) если два отрезка не имеют общих точек, то они параллельны

Б) если два луча не имеют общих точек, то они параллельны

В) если луч и отрезок не имеют общих точек, то они параллельны

Г) если две прямые не имеют общих точек, то они параллельны

2. Какое из следующих утверждений верно?

А) через точку, не принадлежащую данной прямой, проходит только один отрезок, параллельный этой прямой

Б) через точку, не принадлежащую данной прямой, проходит только один луч, параллельный этой прямой

В) через точку, не принадлежащую данной прямой, проходит бесконечно много прямых, не параллельных этой прямой

Г) через точку, не принадлежащую данной прямой, проходят только две прямые, параллельные этой прямой

3. Какое из следующих утверждений неверно?

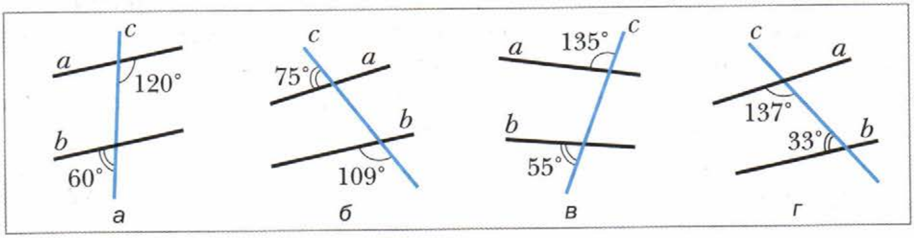
А) если $a \parallel b$ и $b \parallel c$, то $a \parallel c$

Б) если $a \perp b$ и $b \perp c$, то $a \parallel c$

В) если $a \perp b$ и $b \perp c$, то $a \perp c$

Г) если $a \parallel b$ и $c \perp b$, то $c \perp a$

4. На каком из рисунков прямые a и b параллельны?



5. Какое из следующих утверждений неверно?

А) если сумма углов одной пары накрест лежащих углов равна сумме углов другой пары, то прямые не параллельны

Б) если накрест лежащие углы не равны, то прямые не параллельны

В) если сумма односторонних углов не равна 180°, то прямые не параллельны

Г) если соответственные углы не равны, то прямые не параллельны

6. Сколько внешних углов у треугольника?

А) 3 Б) 6 В) 4 Г) 9

7. Чему равна сумма внешних углов треугольника, взятых по одному при каждой вершине?

А) 180° Б) 300° В) 360° Г) 100°

8. В треугольнике ABC биссектрисы углов A и C пересекаются в точке O. Какое из следующих равенств верно?

А) $\angle AOC = 90° - \frac{1}{2}\angle B$ В) $\angle AOC = 90° + \frac{1}{2}\angle B$

Б) $\angle AOC = 90° - \angle B$ Г) $\angle AOC = 90° + \angle B$

9. В треугольнике ABC высоты, проведённые из вершин A и C, пересекаются в точке O. Какое из следующих равенств верно?

А) $\angle AOC = 90° - \angle B$ В) $\angle AOC = 90° + \angle B$

Б) $\angle AOC = 180° - \angle B$ Г) $\angle AOC = 180° - \frac{1}{2}\angle B$

10. Какое из следующих утверждений верно?

А) если две стороны одного прямоугольного треугольника равны двум сторонам другого прямоугольного треугольника, то такие треугольники равны

Б) если катет и острый угол одного прямоугольного треугольника равны катету и острому углу другого прямоугольного треугольника, то такие треугольники равны

В) если гипотенуза и два угла одного прямоугольного треугольника равны гипотенузе и двум углам другого прямоугольного треугольника, то такие треугольники равны

Г) если сторона и два угла одного прямоугольного треугольника равны стороне и двум углам другого прямоугольного треугольника, то такие треугольники равны

11. В треугольнике ABC известно, что $\angle C = 90°$, $\angle B = 60°$. Какое из следующих утверждений неверно?

А) $CB = \frac{1}{2}AB$ В) $CB = \frac{1}{2}AC$

Б) $AC = \frac{1}{2}AB$ Г) $AC = \frac{1}{2}CB$

Итоги главы 3

Параллельные прямые

Две прямые называют параллельными, если они не пересекаются.

Основное свойство параллельных прямых (аксиома параллельности прямых)

Через точку, не лежащую на данной прямой, проходит только одна прямая, параллельная данной.

Признаки параллельности двух прямых

- **Две прямые, перпендикулярные третьей прямой, параллельны.**
- **Если накрест лежащие углы, образующиеся при пересечении двух прямых секущей, равны, то прямые параллельны.**
- **Если сумма односторонних углов, образующихся при пересечении двух прямых секущей, равна 180°, то прямые параллельны.**
- **Если соответственные углы, образующиеся при пересечении двух прямых секущей, равны, то прямые параллельны.**

Свойства параллельных прямых

- **Если две параллельные прямые пересечены секущей, то углы, образующие пару накрест лежащих углов, равны.**
- **Если две параллельные прямые пересечены секущей, то углы, образующие пару соответственных углов, равны.**
- **Если две параллельные прямые пересечены секущей, то сумма углов, образующих пару односторонних углов, равна 180°.**

Расстояние между параллельными прямыми

Расстоянием между двумя параллельными прямыми называют расстояние от любой точки одной из прямых до другой прямой.

Теорема о сумме углов треугольника

Сумма углов треугольника равна 180°.

Внешний угол треугольника

Внешним углом треугольника называют угол, смежный с углом этого треугольника.

Свойство внешнего угла треугольника

Внешний угол треугольника равен сумме двух углов треугольника, не смежных с ним.

Неравенство треугольника

Каждая сторона треугольника меньше суммы двух других его сторон.

Сравнение сторон и углов треугольника

В треугольнике против большей стороны лежит больший угол, и наоборот, против большего угла лежит бóльшая сторона.

Гипотенуза и катет

Сторону прямоугольного треугольника, противолежащую прямому углу, называют гипотенузой, а стороны, прилежащие к прямому углу, — катетами.

Признаки равенства прямоугольных треугольников

- По гипотенузе и катету: **если гипотенуза и катет одного прямоугольного треугольника соответственно равны гипотенузе и катету другого, то такие треугольники равны.**
- По двум катетам: **если катеты одного прямоугольного треугольника соответственно равны катетам другого, то такие треугольники равны.**
- По катету и прилежащему острому углу: **если катет и прилежащий к нему острый угол одного прямоугольного треугольника соответственно равны катету и прилежащему к нему острому углу другого, то такие треугольники равны.**
- По катету и противолежащему острому углу: **если катет и противолежащий ему острый угол одного прямоугольного треугольника соответственно равны катету и противолежащему ему острому углу другого, то такие треугольники равны.**
- По гипотенузе и острому углу: **если гипотенуза и острый угол одного прямоугольного треугольника соответственно равны гипотенузе и острому углу другого, то такие треугольники равны.**

Свойства прямоугольного треугольника

- **В прямоугольном треугольнике гипотенуза больше катета.**
- **Катет, лежащий против угла, величина которого равна $30°$, равен половине гипотенузы.**
- **Если катет равен половине гипотенузы, то угол, лежащий против этого катета, равен $30°$.**

Глава 4. Окружность и круг. Геометрические построения

В этой главе вы познакомитесь со свойствами окружности. Вы узнаете, как, отказавшись от привычных инструментов — угольника и транспортира, используя лишь циркуль и линейку без делений, выполнить многие построения.

§ 19. Геометрическое место точек. Окружность и круг

Любое множество точек – это геометрическая фигура. Изобразить произвольную фигуру легко: всё, что нарисуете, – это геометрическая фигура (рис. 273). Однако изучать фигуры, состоящие из хаотически расположенных точек, вряд ли целесообразно. Поэтому разумно выделить тот класс фигур, все точки которых обладают каким-то характерным свойством. Каждую из таких фигур называют **геометрическим местом точек**.

Определение

Геометрическим местом точек (ГМТ) называют множество всех точек, обладающих определённым свойством.

Образно ГМТ можно представить так: задают некоторое свойство, а потом на белой плоскости *все точки*, обладающие этим свойством, красят в красный цвет. Та «красная фигура», которая при этом получится, и будет ГМТ.

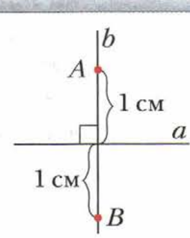
Например, отметим две точки A и B. Для всех точек зададим свойство: одновременно принадлежать лучам AB и BA. Ясно, что указанным свойством обладают все точки отрезка AB, и только они (рис. 274). Поэтому искомым ГМТ является отрезок AB.

Рассмотрим перпендикулярные прямые a и b. Для всех точек зададим свойство: принадлежать прямой b и находиться на расстоянии 1 см от пря-

Рис. 273

Рис. 274

Рис. 275



мой a. Очевидно, что точки A и B (рис. 275) удовлетворяют этим условиям. Также понятно, что никакая другая точка, отличная от A и B, этим свойством не обладает. Следовательно, искомое ГМТ – это фигура, состоящая из двух точек A и B (см. рис. 275).

Чтобы иметь право какое-то множество точек называть ГМТ, надо доказать две взаимно обратные теоремы:

1) *каждая точка данного множества обладает заданным свойством*;

2) *если точка обладает заданным свойством, то она принадлежит данному множеству*.

Теорема 19.1

Серединный перпендикуляр отрезка является геометрическим местом точек, равноудалённых от концов этого отрезка.

Доказательство

По теореме 8.2 каждая точка серединного перпендикуляра обладает заданным свойством. По теореме 11.2, если точка обладает заданным свойством, то она принадлежит серединному перпендикуляру. ◂

Теорема 19.2

Биссектриса угла является геометрическим местом точек, принадлежащих углу и равноудалённых от его сторон.

Прямая теорема

Каждая точка биссектрисы угла равноудалена от его сторон.

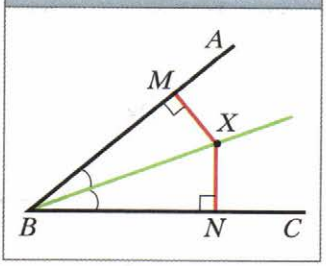
Доказательство

Очевидно, что вершина угла обладает доказываемым свойством.

Рассмотрим произвольную точку X, которая не совпадает с вершиной угла ABC и принадлежит его биссектрисе. Опустим перпендикуляры XM и XN соответственно на стороны BA и BC (рис. 276). Надо доказать, что $XM = XN$.

В прямоугольных треугольниках BXM и BXN гипотенуза BX – общая, $\angle MBX = \angle NBX$, так как BX – биссектриса угла ABC. Следовательно, треугольники BXM и BXN равны по гипотенузе и острому углу. Отсюда $XM = XN$. ◂

Рис. 276



Обратная теорема

Если точка, принадлежащая углу, равноудалена от его сторон, то она лежит на биссектрисе этого угла.

Доказательство

Очевидно, что вершина угла обладает доказываемым свойством.

Рассмотрим произвольную точку X, принадлежащую углу ABC, не совпадающую с его вершиной и равноудалённую от его сторон. Опустим перпендикуляры XM и XN соответственно на стороны BA и BC. Надо доказать, что $\angle MBX = \angle NBX$ (см. рис. 276).

В прямоугольных треугольниках BXM и BXN гипотенуза BX – общая, отрезки XM и XN равны по условию. Следовательно, треугольники BXM и BXN равны по гипотенузе и катету. Отсюда $\angle MBX = \angle NBX$. ◀

Заметим, что доказательство теоремы будет полным, если показать, что равноудалённость точки угла от его сторон исключает возможность, когда одна из точек M или N принадлежит продолжению стороны угла (рис. 277). Исследовать эту ситуацию вы можете на занятии математического кружка.

Также отметим, что теорема остаётся справедливой и для развёрнутого угла.

Определение

Окружностью называют геометрическое место точек, равноудалённых от заданной точки.

Заданную точку называют **центром** окружности. На рисунке 278 точка O – центр окружности.

Любой отрезок, соединяющий точку окружности с её центром, называют **радиусом** окружности. На рисунке 278 отрезок OX – радиус. Из определения следует, что все радиусы одной окружности равны.

Рис. 277

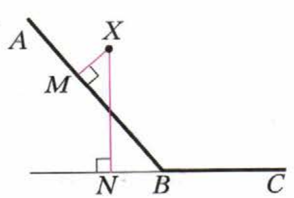
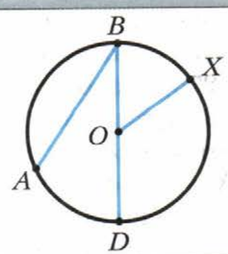


Рис. 278



Отрезок, соединяющий две точки окружности, называют **хордой** окружности. На рисунке 278 отрезок AB – хорда. Хорду, проходящую через центр окружности, называют **диаметром**. На рисунке 278 отрезок BD – диаметр окружности. Очевидно, что $BD = 2OX$, т. е. диаметр окружности в 2 раза больше её радиуса.

Из курса математики 6 класса вы знаете, что фигуру, ограниченную окружностью, называют кругом (рис. 279). Теперь определение круга можно сформулировать с помощью понятия ГМТ.

Определение

Кру́гом называют геометрическое место точек, расстояние от которых до заданной точки не больше данного положительного числа.

Заданную точку называют **центром** круга, данное число – **радиусом** круга. Если X – произвольная точка круга с центром O и радиусом R, то $OX \le R$ (см. рис. 279). Если $OX < R$, то говорят, что точка X лежит внутри окружности, ограничивающей данный круг. Точка Y кругу не принадлежит (см. рис. 279). В этом случае говорят, что точка Y лежит вне окружности, ограничивающей круг. Из определения круга следует, что окружность, ограничивающая круг, ему принадлежит.

Хорда и **диаметр** круга – это хорда и диаметр окружности, ограничивающей круг.

Задача. На продолжении хорды CD окружности с центром O за точку D отметили точку E такую, что отрезок DE равен радиусу окружности. Прямая OE пересекает данную окружность в точках A и B (рис. 280). Докажите, что $\angle AOC = 3\angle CEO$.

Решение. Пусть $\angle CEO = \alpha$.

Так как треугольник ODE – равнобедренный, то $\angle DOE = \angle CEO = \alpha$.

Угол ODC – внешний угол треугольника ODE. Тогда $\angle ODC = \angle DOE + \angle CEO = 2\alpha$.

Рис. 279

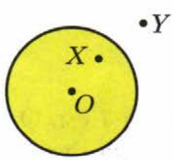
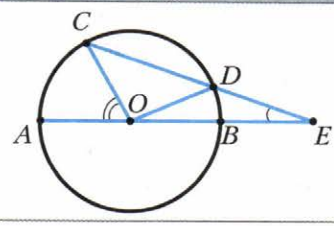


Рис. 280



Так как треугольник COD – равнобедренный, то $\angle OCD = \angle ODC = 2\alpha$.
Угол AOC – внешний угол треугольника COE. Тогда $\angle AOC = \angle OCD + \angle CEO = 2\alpha + \alpha = 3\alpha$, т. е. $\angle AOC = 3\angle CEO$. ◄

1. Какое множество точек называют геометрическим местом точек?
2. Какие две теоремы надо доказать, чтобы иметь право утверждать, что некоторое множество точек является ГМТ?
3. Какая фигура является геометрическим местом точек, равноудалённых от концов отрезка?
4. Какая фигура является геометрическим местом точек, принадлежащих углу и равноудалённых от его сторон?
5. Что называют окружностью?
6. Что называют радиусом окружности?
7. Что называют хордой окружности?
8. Что называют диаметром окружности?
9. Как связаны между собой диаметр и радиус окружности?
10. Что называют кругом?
11. Принадлежит ли окружности её центр?
12. Принадлежит ли кругу его центр?
13. Какое неравенство выполняется для любой точки A, принадлежащей кругу с центром O и радиусом R?
14. Какое неравенство выполняется для любой точки B, не принадлежащей кругу с центром O и радиусом R?

Практические задания

476. Начертите окружность с центром O и радиусом 3,5 см. Отметьте на этом рисунке какие-нибудь:
1) точки A и B такие, что $OA < 3{,}5$ см, $OB < 3{,}5$ см;
2) точки C и D такие, что $OC = 3{,}5$ см, $OD = 3{,}5$ см;
3) точки E и F такие, что $OE > 3{,}5$ см, $OF > 3{,}5$ см.

477. Начертите отрезок AB, длина которого равна 3 см. Найдите точку, удалённую от каждого из концов отрезка AB на 2 см. Сколько существует таких точек?

478. Начертите отрезок CD, длина которого равна 4 см. Найдите точку, удалённую от точки C на 2,5 см, а от точки D – на 3,5 см. Сколько существует таких точек?

479. Начертите окружность, диаметр которой равен 7 см. Отметьте на окружности точку A. Найдите на окружности точки, удалённые от точки A на 4 см.

Упражнения

480. На рисунке 281 изображена окружность с центром B. Укажите радиус, хорду и диаметр окружности. Сколько изображено на рисунке радиусов? Хорд?

481. Хорды AB и CD окружности с центром O равны. Докажите, что $\angle AOB = \angle COD$.

482. На рисунке 282 точка O – центр окружности, $\angle COD = \angle MOK$. Докажите, что хорды CD и MK равны.

483. Отрезки AB и CD – диаметры окружности. Докажите, что $\angle BAC = \angle CDB$.

484. Отрезки MK и EF – диаметры окружности с центром O, $MK = 12$ см, $ME = 10$ см. Найдите периметр треугольника FOK.

485. Отрезки AC и AB – соответственно диаметр и хорда окружности с центром O, $\angle BAC = 26^\circ$ (рис. 283). Найдите $\angle BOC$.

486. Отрезки MP и MK – соответственно хорда и диаметр окружности с центром O, $\angle POK = 84^\circ$ (рис. 284). Найдите $\angle MPO$.

Рис. 281

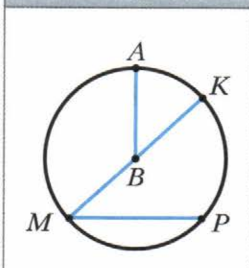


Рис. 282

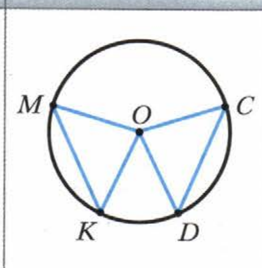


Рис. 283

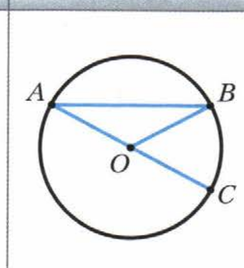
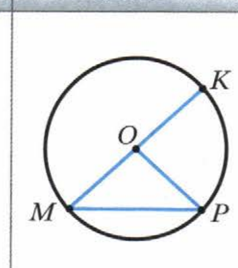


Рис. 284



487. Отрезки AB и AC – соответственно диаметр и хорда окружности с центром O, хорда AC равна радиусу этой окружности. Найдите $\angle BAC$.

488. Отрезок CD – диаметр окружности с центром O. На окружности отметили точку E так, что $\angle COE = 90^\circ$. Докажите, что $CE = DE$.

489. Чему равен диаметр окружности, если известно, что он на 4 см больше радиуса данной окружности?

490. Отрезки AB и CD – диаметры окружности. Докажите, что $AC \parallel BD$.

491. Хорда пересекает диаметр окружности под углом 30° и делит его на отрезки длиной 4 см и 10 см. Найдите расстояние от центра окружности до этой хорды.

492. Хорда CD пересекает диаметр AB в точке M, $CE \perp AB$, $DF \perp AB$, $\angle AMC = 60°$, $ME = 18$ см, $MF = 12$ см (рис. 285). Найдите хорду CD.

Рис. 285

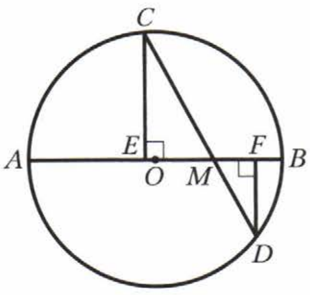
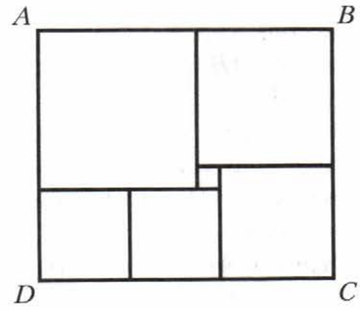


Рис. 286



493. Найдите геометрическое место центров окружностей данного радиуса, проходящих через данную точку.

494. Найдите геометрическое место центров окружностей, проходящих через две данные точки.

495. Найдите ГМТ, равноудалённых от двух данных пересекающихся прямых.

496. Найдите геометрическое место вершин равнобедренных треугольников, имеющих общее основание.

497. Найдите ГМТ, равноудалённых от двух параллельных прямых.

498. Найдите ГМТ, удалённых от данной прямой на заданное расстояние.

499. Отрезок AB – диаметр окружности, M – произвольная точка окружности, отличная от точек A и B. Докажите, что $\angle AMB = 90°$.

500. Даны точки A и B. Найдите геометрическое место точек X таких, что $AX > BX$.

501. Даны точки A и B. Найдите геометрическое место точек X таких, что $AX > AB$.

Упражнения для повторения

502. В равнобедренном треугольнике ABC с основанием AC проведены биссектрисы AD и CE. Докажите, что $AE = ED$.

503. Из точки O через точки A, B и C проведены лучи OA, OB и OC. Известно, что $OA = OB = OC$, $\angle AOB = 80°$, $\angle BOC = 110°$, $\angle AOC = 170°$. Найдите углы треугольника ABC.

504. На стороне AB треугольника ABC отметили точку M так, что $BM = CM$, MK – биссектриса угла AMC. Докажите, что $MK \parallel BC$.

505. В остроугольном треугольнике один из внешних углов равен 160°. Найдите угол между прямыми, на которых лежат высоты, проведённые из двух других вершин треугольника.

Наблюдайте, рисуйте, конструируйте, фантазируйте

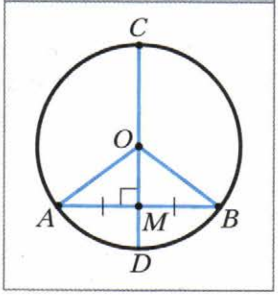
506. На рисунке 286 прямоугольник $ABCD$ составлен из квадратов. Найдите сторону самого большого квадрата, если сторона самого маленького квадрата равна 1.

§ 20. Некоторые свойства окружности. Касательная к окружности

Теорема 20.1

Диаметр окружности, перпендикулярный хорде, делит эту хорду пополам.

Рис. 287



Доказательство

Если хорда является диаметром, то теорема очевидна.

На рисунке 287 изображена окружность с центром O, M – точка пересечения диаметра CD и хорды AB, $CD \perp AB$. Надо доказать, что $AM = MB$.

Проведём радиусы OA и OB. В равнобедренном треугольнике AOB ($OA = OB$) отрезок OM – высота, а значит, и медиана, т. е. $AM = MB$. ◄

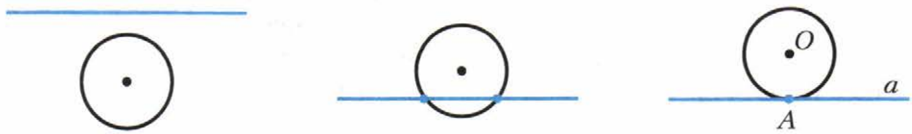
Теорема 20.2

Диаметр окружности, делящий хорду, отличную от диаметра, пополам, перпендикулярен этой хорде.

Докажите эту теорему самостоятельно. Подумайте, будет ли верным это утверждение, если хорда является диаметром.

На рисунке 288 показаны все возможные случаи взаимного расположения прямой и окружности. На рисунке 288, *а* они не имеют общих точек, на рисунке 288, *б* – имеют две общие точки, на рисунке 288, *в* – одну.

Рис. 288



а б в

✔ **Определение**

Прямую, имеющую с окружностью только одну общую точку, называют касательной к окружности.

Касательная к окружности имеет только одну общую точку с кругом, ограниченным этой окружностью. На рисунке 288, *в* прямая a – касательная к кругу с центром в точке O, A – точка касания.

Если отрезок (луч) принадлежит касательной к окружности и имеет с этой окружностью общую точку, то говорят, что отрезок (луч) *касается* окружности. Например, на рисунке 289 изображён отрезок AB, который касается окружности в точке C.

✔ **Теорема 20.3**
(свойство касательной)

Касательная к окружности перпендикулярна радиусу, проведённому в точку касания.

Доказательство

На рисунке 290 изображена окружность с центром O, A – точка касания прямой a и окружности. Надо доказать, что $OA \perp a$.

Предположим, что это не так, т. е. отрезок OA – наклонная к прямой a. Тогда из точки O опустим перпендикуляр OM на прямую a (рис. 291). Поскольку точка A – единственная общая точка прямой a и круга с центром O, то точка M не принадлежит этому кругу. Отсюда $OM =$

Рис. 289

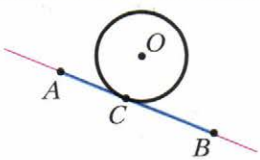


Рис. 290

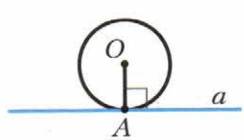
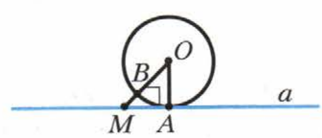


Рис. 291



$= MB + OB$, где точка B – точка пересечения окружности и перпендикуляра OM. Отрезки OA и OB равны как радиусы окружности. Таким образом, $OM > OA$. Получили противоречие: перпендикуляр OM больше наклонной OA. Следовательно, $OA \perp a$. ◂

Теорема 20.4
(признак касательной к окружности)

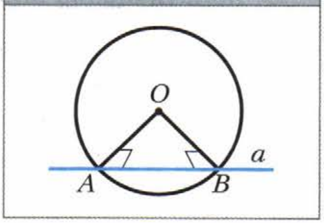
Если прямая, проходящая через точку окружности, перпендикулярна радиусу, проведённому в эту точку, то эта прямая является касательной к данной окружности.

Доказательство

На рисунке 290 изображена окружность с центром в точке O, отрезок OA – её радиус, точка A принадлежит прямой a, $OA \perp a$. Докажем, что прямая a – касательная к окружности.

Пусть прямая a не является касательной, а имеет ещё одну общую точку B с окружностью (рис. 292). Тогда ΔAOB – равнобедренный ($OA = OB$ как радиусы). Отсюда $\angle OBA = \angle OAB = 90°$. Получаем противоречие: в треугольнике AOB есть два прямых угла. Следовательно, прямая a является касательной к окружности. ◂

Рис. 292



Следствие

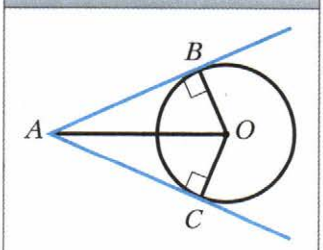
Если расстояние от центра окружности до некоторой прямой равно радиусу окружности, то эта прямая является касательной к данной окружности.

Докажите это следствие самостоятельно.

<u>**Задача.**</u> Докажите, что если через данную точку к окружности проведены две касательные, то отрезки касательных, соединяющих данную точку с точками касания, равны.

Решение. На рисунке 293 изображена окружность с центром O. Прямые AB и AC – касательные, точки B и C – точки касания. Надо доказать, что $AB = AC$.

Рис. 293



Проведём радиусы OB и OC в точки касания. По свойству касательной $OB \perp AB$ и $OC \perp AC$. В прямоугольных треугольниках AOB и AOC катеты OB и OC равны как радиусы одной окружности, AO – общая гипотенуза. Следовательно, треугольники AOB и AOC равны по гипотенузе и катету. Отсюда $AB = AC$. ◄

1. Как делит хорду диаметр, перпендикулярный ей?
2. Чему равен угол между хордой, отличной от диаметра, и диаметром, делящим эту хорду пополам?
3. Опишите все возможные случаи взаимного расположения прямой и окружности.
4. Какую прямую называют касательной к окружности?
5. Каким свойством обладает радиус, проведённый в точку касания прямой и окружности?
6. Сформулируйте признак касательной к окружности.
7. Каким свойством обладают касательные, проведённые к окружности через одну точку?

Практические задания

507. Начертите окружность с центром O, проведите хорду AB. Пользуясь угольником, разделите эту хорду пополам.

508. Начертите окружность с центром O, проведите хорду CD. Пользуясь линейкой со шкалой, проведите диаметр, перпендикулярный хорде CD.

509. Начертите окружность, отметьте на ней точки A и B. Пользуясь линейкой и угольником, проведите прямые, которые касаются окружности в точках A и B.

510. Проведите прямую a и отметьте на ней точку M. Пользуясь угольником, линейкой и циркулем, проведите окружность радиуса 3 см, которая касается прямой a в точке M. Сколько таких окружностей можно провести?

Упражнения

511. На рисунке 294 точка O – центр окружности, диаметр CD перпендикулярен хорде AB. Докажите, что $\angle AOD = \angle BOD$.

512. Докажите, что равные хорды окружности равноудалены от её центра.

513. Докажите, что если хорды окружности равноудалены от её центра, то они равны.

514. Верно ли, что прямая, перпендикулярная радиусу окружности, касается этой окружности?

515. Прямая CD касается окружности с центром O в точке A, отрезок AB – хорда окружности, $\angle BAD = 35^\circ$ (рис. 295). Найдите $\angle AOB$.

516. Прямая CD касается окружности с центром O в точке A, отрезок AB – хорда окружности, $\angle AOB = 80°$ (см. рис. 295). Найдите $\angle BAC$.

517. Дана окружность, диаметр которой равен 6 см. Прямая a удалена от её центра на: 1) 2 см; 2) 3 см; 3) 6 см. В каком случае прямая a является касательной к окружности?

518. В треугольнике ABC известно, что $\angle C = 90°$. Докажите, что:
1) прямая BC является касательной к окружности с центром A, проходящей через точку C;
2) прямая AB не является касательной к окружности с центром C, проходящей через точку A.

519. Докажите, что диаметр окружности больше любой хорды, отличной от диаметра.

520. В окружности с центром O через середину радиуса провели хорду AB, перпендикулярную ему. Докажите, что $\angle AOB = 120°$.

521. Найдите угол между радиусами OA и OB окружности, если расстояние от центра O окружности до хорды AB в 2 раза меньше: 1) длины хорды AB; 2) радиуса окружности.

522. В окружности провели диаметр AB и хорды AC и CD так, что $AC = 12$ см, $\angle BAC = 30°$, $AB \perp CD$. Найдите длину хорды CD.

523. Через точку M к окружности с центром O провели касательные MA и MB, A и B – точки касания, $\angle OAB = 20°$. Найдите $\angle AMB$.

524. Через концы хорды AB, равной радиусу окружности, провели две касательные, пересекающиеся в точке C. Найдите $\angle ACB$.

525. Через точку C окружности с центром O провели касательную к этой окружности, AB – диаметр окружности. Из точки A на касательную опущен перпендикуляр AD. Докажите, что луч AC – биссектриса угла BAD.

526. Прямая AC касается окружности с центром O в точке A (рис. 296). Докажите, что угол BAC в 2 раза меньше угла AOB.

Рис. 294

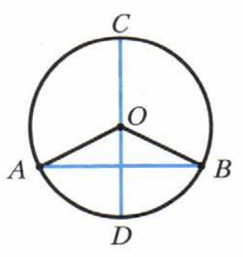


Рис. 295

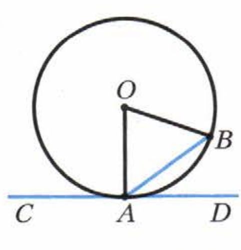
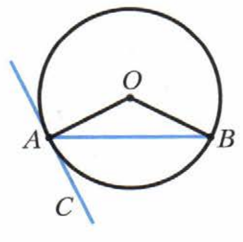


Рис. 296



527. Отрезки AB и BC – соответственно хорда и диаметр окружности, $\angle ABC = 30°$. Через точку A провели касательную к окружности, пересекающую прямую BC в точке D. Докажите, что ΔABD – равнобедренный.

528. Известно, что диаметр AB делит хорду CD пополам, но не перпендикулярен ей. Докажите, что CD – также диаметр.

◇

529. Найдите геометрическое место центров окружностей, которые касаются данной прямой в данной точке.

530. Найдите геометрическое место центров окружностей, которые касаются обеих сторон данного угла.

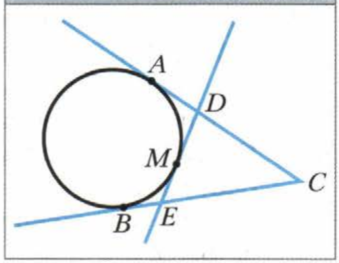
531. Найдите геометрическое место центров окружностей, которые касаются данной прямой.

532. Прямые, касающиеся окружности с центром O в точках A и B, пересекаются в точке K, $\angle AKB = 120°$. Докажите, что $AK + BK = OK$.

533. Окружность касается стороны AB треугольника ABC в точке M и касается продолжения двух других сторон. Докажите, что сумма длин отрезков BC и BM равна половине периметра треугольника ABC.

534. Через точку C проведены касательные AC и BC к окружности, A и B – точки касания (рис. 297). На окружности взяли произвольную точку M, лежащую в одной полуплоскости с точкой C относительно прямой AB, и через неё провели касательную к окружности, пересекающую прямые AC и BC в точках D и E соответственно. Докажите, что периметр треугольника DEC не зависит от выбора точки M.

Рис. 297



Упражнения для повторения

535. Докажите, что середина M отрезка, концы которого принадлежат двум параллельным прямым, является серединой любого отрезка, который проходит через точку M и концы которого принадлежат этим прямым.

536. Отрезки AB и CD лежат на одной прямой и имеют общую середину. Точку M выбрали так, что треугольник AMB – равнобедренный с основанием AB. Докажите, что ΔCMD также является равнобедренным с основанием CD.

537. На стороне MK треугольника MPK отметили точки E и F так, что точка E лежит между точками M и F, $ME = EP$, $PF = FK$. Найдите угол M, если $\angle EPF = 92°$, $\angle K = 26°$.

538. В остроугольном треугольнике ABC проведена биссектриса BM, из точки M на сторону BC опущен перпендикуляр MK, $\angle ABM = \angle KMC$. Докажите, что треугольник ABC – равнобедренный.

Наблюдайте, рисуйте, конструируйте, фантазируйте

539. Установите закономерность форм фигур, изображённых на рисунке 298. Какую фигуру надо поставить следующей?

Рис. 298

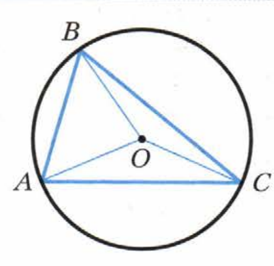
§ 21. Описанная и вписанная окружности треугольника

Определение

Окружность называют описанной около треугольника, если она проходит через все вершины этого треугольника.

На рисунке 299 изображена окружность, описанная около треугольника. В этом случае также говорят, что треугольник **вписан** в окружность.

Рис. 299



Центр описанной окружности треугольника равноудалён от всех его вершин. На рисунке 299 точка O – центр окружности, описанной около треугольника ABC, поэтому $OA = OB = OC$.

Теорема 21.1

Около любого треугольника можно описать окружность.

Доказательство

Для доказательства достаточно показать, что для любого треугольника ABC существует точка O, равноудалённая от всех его вершин. Тогда точка O будет центром описанной окружности, а отрезки OA, OB и OC – её радиусами.

На рисунке 300 изображён произвольный треугольник ABC. Проведём серединные перпендикуляры k и l сторон AB и AC соответственно. Пусть O – точка пересечения этих прямых. Так как точка O принадлежит серединному перпендикуляру k, то $OA = OB$. Поскольку точка O принадлежит серединному перпендикуляру l, то $OA = OC$. Значит, $OA = OB = OC$, т. е. точка O равноудалена от всех вершин треугольника. ◄

Заметим, что около треугольника можно описать только одну окружность. Это следует из того, что серединные перпендикуляры k и l (см. рис. 300) имеют только одну точку пересечения. Следовательно, существует только одна точка, равноудалённая от всех вершин треугольника.

Следствие 1

Три серединных перпендикуляра сторон треугольника пересекаются в одной точке.

Следствие 2

Центр окружности, описанной около треугольника, — это точка пересечения серединных перпендикуляров его сторон.

Определение

Окружность называют вписанной в треугольник, если она касается всех его сторон.

На рисунке 301 изображена окружность, вписанная в треугольник. В этом случае также говорят, что треугольник **описан** около окружности.

Точка O (рис. 301) – центр вписанной окружности треугольника ABC, отрезки OM, ON, OP – радиусы, проведённые в точки касания, $OM \perp AB$, $ON \perp BC$, $OP \perp AC$. Поскольку $OM = ON = OP$, то центр вписанной окружности треугольника равноудалён от всех его сторон.

Рис. 300

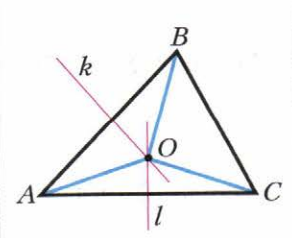


Рис. 301

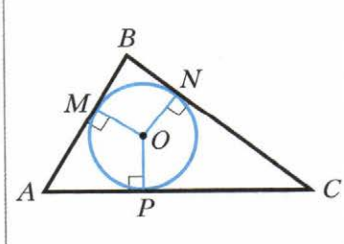
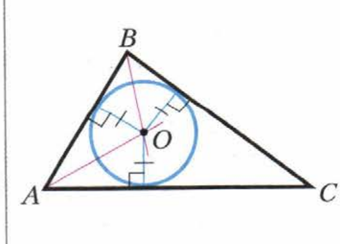


Рис. 302



Теорема 21.2

В любой треугольник можно вписать окружность.

Доказательство

Для доказательства достаточно показать, что для любого треугольника ABC существует точка O, удалённая от каждой его стороны на некоторое расстояние r. Тогда в силу следствия из теоремы 20.4 точка O будет центром окружности радиуса r, которая касается сторон AB, BC и AC.

На рисунке 302 изображён произвольный треугольник ABC. Проведём биссектрисы углов A и B, O – точка их пересечения. Так как точка O принадлежит биссектрисе угла A, то она равноудалена от сторон AB и AC (теорема 19.2). Аналогично, так как точка O принадлежит биссектрисе угла B, то она равноудалена от сторон BA и BC. Следовательно, точка O равноудалена от всех сторон треугольника. ◂

Заметим, что в треугольник можно вписать только одну окружность. Это следует из того, что биссектрисы углов A и B (см. рис. 302) пересекаются только в одной точке. Следовательно, существует только одна точка, равноудалённая от сторон треугольника.

Следствие 1

Биссектрисы углов треугольника пересекаются в одной точке.

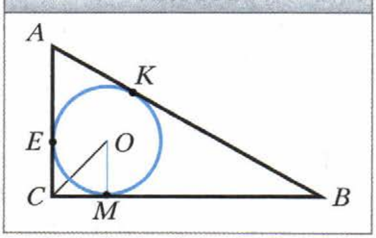
Следствие 2

Центр окружности, вписанной в треугольник, — это точка пересечения его биссектрис.

Задача. Докажите, что радиус окружности, вписанной в прямоугольный треугольник, определяется по формуле $r = \dfrac{a+b-c}{2}$, где r – радиус вписанной окружности, a и b – катеты, c – гипотенуза.

Решение. В треугольнике ABC $\angle ACB = 90^\circ$, $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$, точка O – центр вписанной окружности, M, E и K – точки касания вписанной окружности со сторонами BC, AC и AB соответственно (рис. 303).

Рис. 303



Отрезок OM – радиус окружности, проведённый в точку касания. Тогда $OM \perp BC$.

Так как точка O – центр вписанной окружности, то CO – биссектриса угла ACB, следовательно, $\angle OCM = 45°$. Тогда треугольник CMO – равнобедренный прямоугольный, $CM = OM = r$.

Используя свойство отрезков касательных, проведённых к окружности через одну точку, получаем: $CE = CM$. Поскольку $CM = r$, то $CE = r$. Получаем $AK = AE = b - r$; $BK = BM = a - r$.

Так как $AK + BK = AB$, то $b - r + a - r = c$, $2r = a + b - c$, $r = \dfrac{a + b - c}{2}$. ◄

1. Какую окружность называют описанной около треугольника?
2. Какой треугольник называют вписанным в окружность?
3. Около какого треугольника можно описать окружность?
4. Какая точка является центром окружности, описанной около треугольника?
5. Какую окружность называют вписанной в треугольник?
6. Какой треугольник называют описанным около окружности?
7. В какой треугольник можно вписать окружность?
8. Какая точка является центром окружности, вписанной в треугольник?

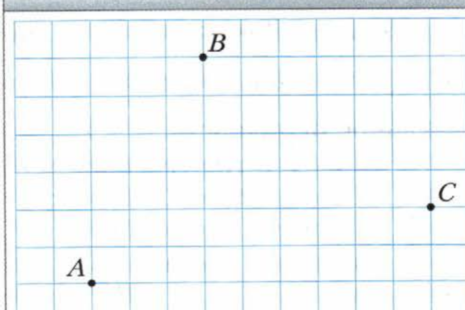
Практические задания

540. Начертите разносторонний остроугольный треугольник.
1) Пользуясь линейкой со шкалой и угольником, найдите центр окружности, описанной около данного треугольника.
2) Опишите около треугольника окружность.
Выполните задания 1 и 2 для разносторонних прямоугольного и тупоугольного треугольников.

541. Начертите:
1) равнобедренный остроугольный треугольник;
2) равнобедренный тупоугольный треугольник.
Выполните задания 1 и 2 из задания 540.

542. Перерисуйте в тетрадь рисунок 304. Проведите через точки A, B, C окружность, пользуясь линейкой со шкалой, угольником и циркулем.

Рис. 304



543. Начертите разносторонний треугольник.
1) Пользуясь линейкой и транспортиром, найдите центр окружности, вписанной в данный треугольник.

2) Пользуясь угольником, найдите точки касания вписанной окружности со сторонами треугольника.

3) Впишите в данный треугольник окружность.

544. Начертите равнобедренный треугольник. Выполните задания 1, 2 и 3 из задания 543.

Упражнения

545. Докажите, что центр описанной окружности равнобедренного треугольника принадлежит прямой, которая содержит медиану, проведённую к его основанию.

546. Докажите, что центр вписанной окружности равнобедренного треугольника принадлежит высоте, проведённой к его основанию.

547. Докажите, что если центр вписанной окружности треугольника принадлежит его высоте, то этот треугольник – равнобедренный.

548. Докажите, что центр описанной окружности равностороннего треугольника является точкой пересечения его биссектрис.

549. На рисунке 305 в треугольники ABD и CBD вписаны окружности с центрами O_1 и O_2 соответственно. Докажите, что $\angle O_1DO_2$ – прямой.

550. На рисунке 306 в треугольники ABD и CBD вписаны окружности с центрами O_1 и O_2 соответственно, $\angle ABC = 50°$. Найдите угол O_1BO_2.

551. Через центр O окружности, описанной около треугольника ABC, провели прямую, перпендикулярную стороне AC и пересекающую сторону AB в точке M. Докажите, что $AM = MC$.

552. Окружность, вписанная в треугольник ABC (рис. 307), касается его сторон в точках M, K и E, $BK = 2$ см, $KC = 4$ см, $AM = 8$ см. Найдите периметр треугольника ABC.

553. Окружность, вписанная в треугольник ABC, касается его сторон в точках M, K и E, $AM = 13$ см, $BK = 3$ см, периметр треугольника ABC равен 46 см. Найдите длину стороны AC.

Рис. 305

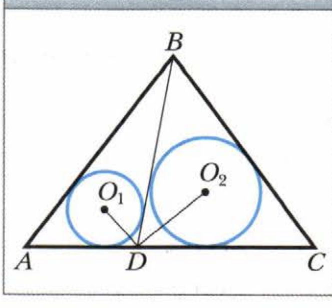


Рис. 306

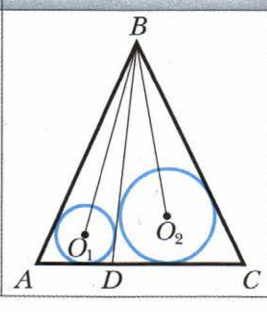
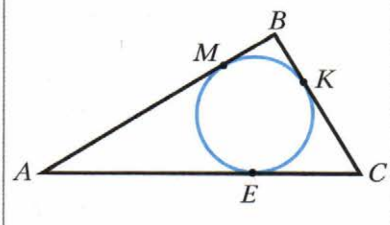


Рис. 307



554. Докажите, что если центр окружности, описанной около треугольника, принадлежит его высоте, то этот треугольник равнобедренный.

555. Докажите, что если центр окружности, вписанной в треугольник, принадлежит его медиане, то этот треугольник равнобедренный.

556. Докажите, что если центры вписанной и описанной окружностей треугольника совпадают, то этот треугольник равносторонний.

557. Боковая сторона равнобедренного треугольника делится точкой касания вписанной окружности в отношении 7 : 5, считая от вершины треугольника. Найдите стороны треугольника, если его периметр равен 68 см.

558. Периметр треугольника ABC, описанного около окружности, равен 52 см. Точка касания со стороной AB делит эту сторону в отношении 2 : 3, считая от вершины A. Точка касания со стороной BC удалена от вершины C на 6 см. Найдите стороны треугольника.

559. В треугольник с углами 30°, 70° и 80° вписана окружность. Найдите углы треугольника, вершины которого являются точками касания вписанной окружности со сторонами данного треугольника.

560. Окружность, вписанная в равнобедренный треугольник ABC, касается его боковых сторон AB и BC в точках M и N соответственно. Докажите, что $MN \parallel AC$.

561. Докажите, что если центр окружности, описанной около треугольника, принадлежит его стороне, то этот треугольник – прямоугольный.

562. В треугольник ABC вписана окружность, касающаяся стороны AB в точке M, $BC = a$. Докажите, что $AM = p - a$, где p – периметр треугольника ABC.

563. К окружности, вписанной в равносторонний треугольник со стороной a, провели касательную, пересекающую две его стороны. Найдите периметр треугольника, который эта касательная отсекает от данного.

564. В равнобедренный треугольник ABC ($AB = BC$) с основанием 10 см вписана окружность. К этой окружности проведены три касательные, отсекающие от данного треугольника треугольники ADK, BEF и CMN. Сумма периметров этих треугольников равна 42 см. Чему равна боковая сторона данного треугольника?

565. В треугольнике ABC отрезок BD – медиана, $AB = 7$ см, $BC = 8$ см. В треугольники ABD и BDC вписали окружности. Найдите расстояние между точками касания этих окружностей с отрезком BD.

566. Каждый из углов BAC и ACB треугольника ABC разделили на три равные части (рис. 308). Докажите, что $\angle AMN = \angle CMN$.

567. Пусть вершина угла B недоступна (рис. 309). С помощью транспортира и линейки без делений постройте прямую, содержащую биссектрису угла B.

Рис. 308

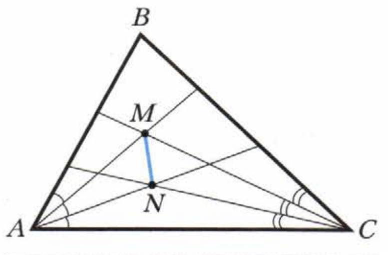
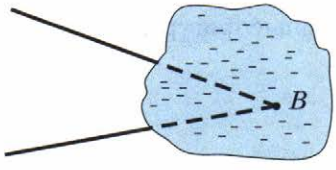


Рис. 309



568. Точки F и O – центры вписанной и описанной окружностей равнобедренного треугольника ABC соответственно (рис. 310). Они находятся на одинаковом расстоянии от его основания AC. Найдите углы треугольника ABC.

Упражнения для повторения

569. Биссектриса угла ABC образует с его стороной угол, равный углу, смежному с углом ABC. Найдите угол ABC.

570. В равнобедренном треугольнике из вершины одного угла при основании провели высоту треугольника, а из вершины другого угла при основании – биссектрису треугольника. Один из углов, образовавшихся при пересечении проведённых биссектрисы и высоты, равен 64°. Найдите углы данного треугольника.

571. На рисунке 311 $BC \parallel AD$, $AB = 3$ см, $BC = 10$ см. Биссектриса угла BAD пересекает отрезок BC в точке K. Найдите отрезки BK и KC.

Рис. 310

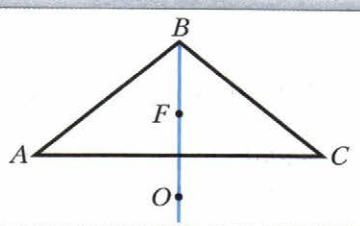
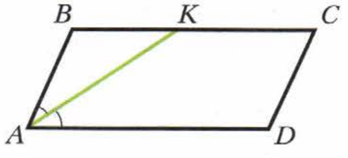


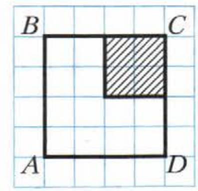
Рис. 311



572. В треугольнике ABC известно, что $AB = BC$, AM и CK – медианы этого треугольника. Докажите, что $MK \parallel AC$.

Наблюдайте, рисуйте, конструируйте, фантазируйте

Рис. 312



573. В квадрате $ABCD$ вырезали заштрихованную фигуру (рис. 312). Разделите оставшуюся часть квадрата на четыре равные фигуры.

§ 22. Задачи на построение

С помощью линейки с делениями, циркуля, угольника, транспортира, лекал (рис. 313) вам не раз приходилось проводить различные геометрические построения.

Рис. 313

А можно ли обходиться меньшим количеством чертёжных инструментов? Оказывается, что во многих случаях достаточно использовать только *циркуль* и *линейку без делений*. Например, чтобы провести биссектрису угла, совсем не обязательно иметь транспортир, а разделить отрезок пополам можно и тогда, когда на линейку не нанесена шкала.

А стоит ли в наше время, когда созданы точнейшие приборы и совершенные компьютерные программы, позволяющие выполнять сложнейшие измерения и построения, обходиться такими скудными средствами, как циркуль и линейка? На практике конечно нет. Поэтому, например, конструкторы, строители, архитекторы, дизайнеры не ограничивают себя в выборе инструментов.

Однако при построении фигур в геометрии принимают такие правила:

1) *все построения выполняются только с помощью циркуля и линейки без делений;*

2) *с помощью линейки можно через заданную точку провести произвольную прямую, а также через заданные две точки A и B провести прямую AB;*

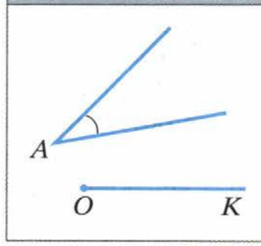
3) *с помощью циркуля можно построить окружность с данным центром и радиусом, равным заданному отрезку.*

Итак, договоримся, что если в задаче требуется построить какую-то фигуру, то построение выполняется по описанным выше правилам.

Решить задачу на построение – это значит составить план (*алгоритм*) построения фигуры; реализовать план, выполнив построение; доказать, что полученная фигура является искомой.

Рассмотрим основные задачи на построение.

Рис. 314

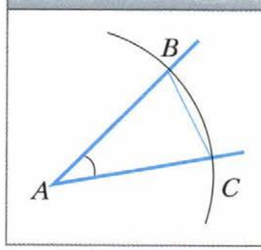


Задача 1. Постройте угол, равный данному, одна из сторон которого является данным лучом.

Решение. На рисунке 314 изображены угол A и луч OK. Надо построить угол, равный углу A, одной из сторон которого является луч OK.

Проведём окружность произвольного радиуса r с центром в точке A. Точки пересечения этой окружности со сторонами угла A обозначим B и C (рис. 315). Тогда $AB = AC = r$.

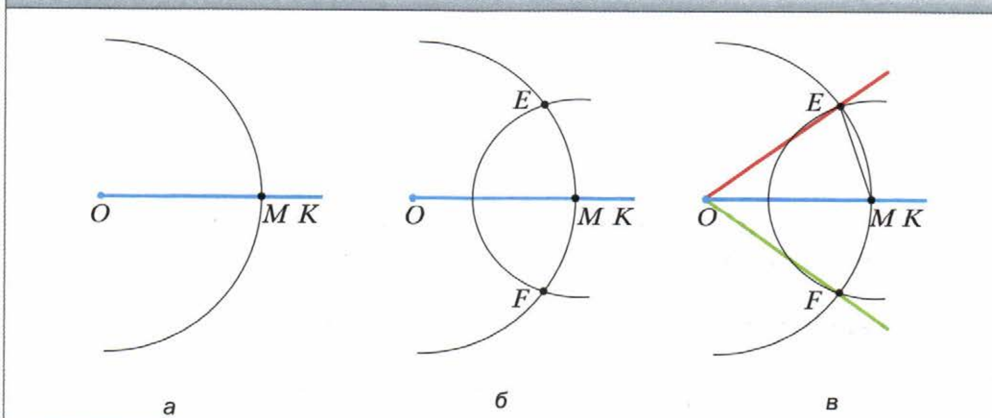
Рис. 315



Проведём окружность радиуса r с центром в точке O. Она пересекает луч OK в точке M (рис. 316, *а*). Затем проведём окружность с центром в точке M и радиусом BC. Пусть E и F – точки пересечения окружностей с центрами O и M (рис. 316, *б*). Проведём лучи OE и OF (рис. 316, *в*).

Покажем, что каждый из углов EOM и FOM – искомый. Докажем, например, что $\angle EOM = \angle BAC$.

Рис. 316



Рассмотрим треугольники ABC (рис. 315) и OEM (рис. 316, *в*). Имеем: $AB = OE = r = AC = OM$. Кроме того, по построению $EM = BC$. Следовательно, треугольники ABC и OEM равны по третьему признаку равенства треугольников. Отсюда $\angle EOM = \angle BAC$. Аналогично можно показать, что $\angle BAC = \angle FOM$. ◄

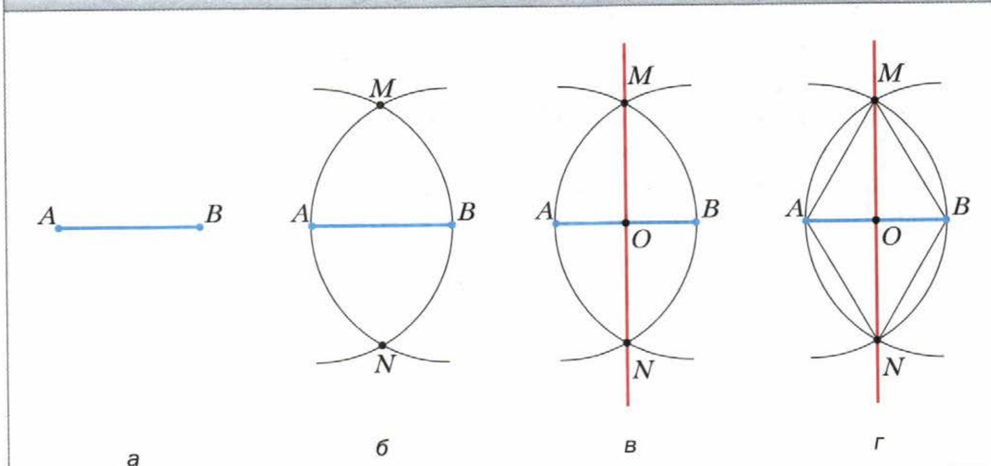
Замечание. Мы построили два угла EOM и FOM, удовлетворяющие условию задачи. Эти углы равны. В таких случаях считают, что задача на построение имеет одно решение.

Задача 2. Постройте серединный перпендикуляр данного отрезка.

Решение. Пусть AB – данный отрезок (рис. 317, *а*). Проведём две окружности с центрами A и B и радиусом AB. Точки пересечения этих окружностей обозначим M и N (рис. 317, *б*). Проведём прямую MN (рис. 317, *в*).

Из построения следует, что $MA = MB = AB$ и $NA = NB = AB$ (рис. 317, *г*). Следовательно, точки M и N принадлежат серединному перпендикуляру отрезка AB. Прямая MN и является серединным перпендикуляром отрезка AB. ◄

Рис. 317



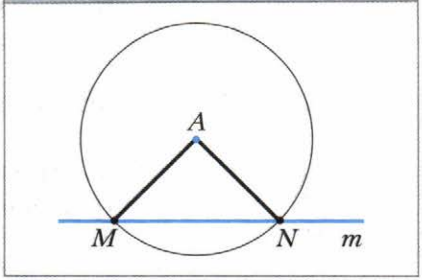
Замечание. Поскольку прямая MN пересекает отрезок AB в его середине, точке O, то тем самым решена следующая задача.

Задача 3. Разделите данный отрезок пополам.

Задача 4. Даны прямая и не принадлежащая ей точка. Через эту точку проведите прямую, перпендикулярную данной.

Решение. Пусть m – данная прямая, A – не принадлежащая ей точка. Проведём окружность с центром в точке A так, чтобы она пересекла прямую m в двух точках. Обозначим эти точки M и N (рис. 318).

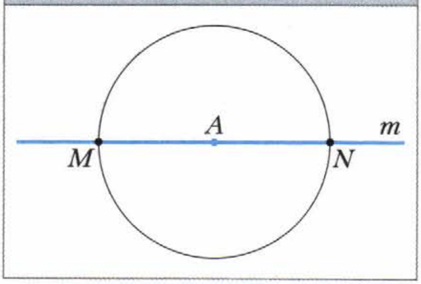
Рис. 318



Поскольку $AM = AN$, то точка A принадлежит серединному перпендикуляру отрезка MN. Построив этот серединный перпендикуляр (см. задачу 2), мы тем самым решим задачу. ◂

Задача 5. Даны прямая и принадлежащая ей точка. Через эту точку проведите прямую, перпендикулярную данной.

Рис. 319



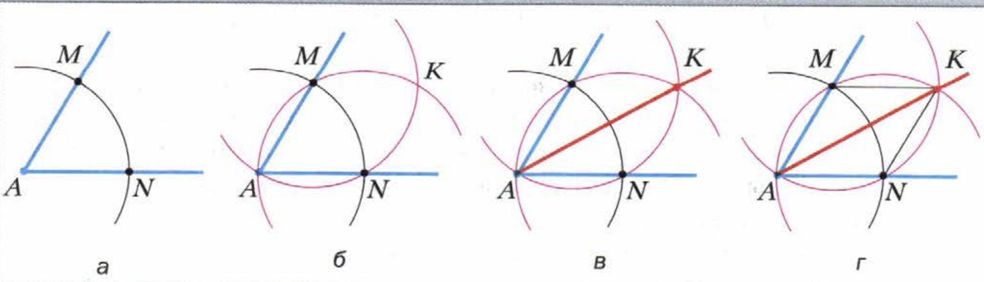
Решение. Пусть m – данная прямая, A – принадлежащая ей точка. Проведём окружность произвольного радиуса с центром в точке A. Она пересекает прямую m в точках M и N (рис. 319).

Поскольку $AM = AN$, то задача свелась к построению серединного перпендикуляра отрезка MN. ◂

Задача 6. Постройте биссектрису данного угла.

Решение. Пусть A – данный угол. Проведём окружность произвольного радиуса с центром в точке A. Эта окружность пересекает стороны угла в точках M и N (рис. 320, *а*). Тем же радиусом проведём окружности с центрами M и N. Эти окружности пересекаются в точках A и K (рис. 320, *б*). Проведём луч AK (рис. 320, *в*).

Рис. 320



Докажем, что луч AK – искомая биссектриса.

Действительно, треугольники AMK и ANK (рис. 320, *г*) равны по трём сторонам. Следовательно, $\angle MAK = \angle NAK$. ◂

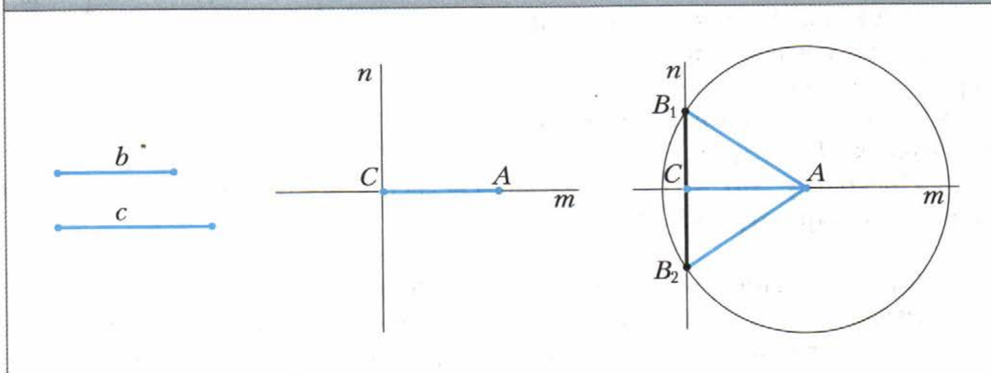
Задача 7. Постройте прямоугольный треугольник по гипотенузе и катету.

Решение. Пусть даны два отрезка, длины которых равны c и b (рис. 321, *а*). Надо построить прямоугольный треугольник ABC, в котором $\angle C = 90°$, $AB = c$, $AC = b$.

Проведём две перпендикулярные прямые m и n, C – точка их пересечения. На прямой m отложим отрезок CA, равный b (рис. 321, *б*). Проведём окружность с центром в точке A и радиусом, равным c. Эта окружность пересечёт прямую n в двух точках B_1 и B_2 (рис. 321, *в*).

Каждый из треугольников ACB_1 и ACB_2 – искомый.

Рис. 321



а б в

Поскольку треугольники ACB_1 и ACB_2 равны, то задача имеет единственное решение. ◂

Задача 8. Постройте треугольник по стороне и высотам, проведённым к двум другим сторонам.

Решение. На рисунке 322 изображён треугольник ABC, отрезки AA_1 и CC_1 – его высоты. Если известны отрезки AC, AA_1 и CC_1, то можно построить прямоугольные треугольники AA_1C и CC_1A по гипотенузе и катету.

Приведённые рассуждения называют **анализом** задачи на построение. Он подсказывает план построения.

Построим прямоугольный треугольник AA_1C, в котором гипотенуза AC равна данной стороне, а катет AA_1 – одной из данных высот (рис. 323).

В построенном треугольнике угол ACA_1 равен одному из углов, прилежащих к заданной стороне искомого треугольника. С помощью аналогичного построения можно получить другой прилежащий к данной стороне угол. На рисунке 324 это угол C_1AC.

Рис. 322

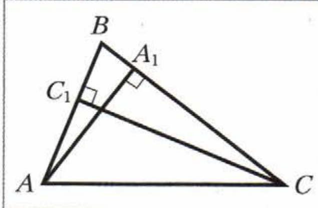


Рис. 323

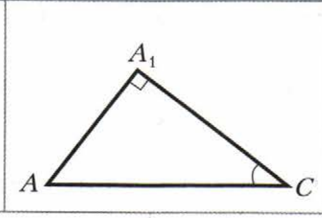
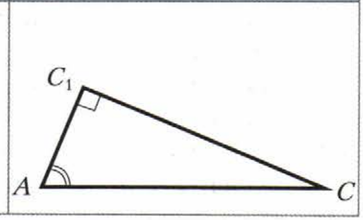


Рис. 324



Теперь осталось построить треугольник по стороне и двум прилежащим к ней углам. Выполните это построение самостоятельно. ◄

Задача 9. Постройте треугольник по углу, высоте и биссектрисе, проведённым из вершины этого угла.

Решение. Проведём анализ задачи на построение. На рисунке 325 изображён треугольник ABC, в котором отрезок BD – высота, отрезок BK – биссектриса.

Если известны длины отрезков BD и BK, то прямоугольный треугольник BDK можно построить по гипотенузе и катету. Также отметим, что если известен угол ABC, то можно построить углы ABK и KBC, каждый из которых равен $\frac{1}{2}\angle ABC$. Отсюда получаем план построения.

Строим прямоугольный треугольник BDK, в котором гипотенуза BK равна данной биссектрисе, а катет BD – данной высоте (рис. 326). Строим два угла, каждый из которых равен половине данного, так, чтобы луч BK был их общей стороной. На рисунке 326 это углы ABK и KBC. Треугольник ABC – искомый. ◄

Рис. 325

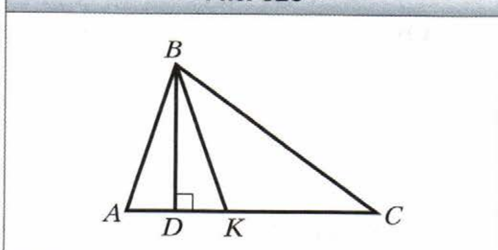
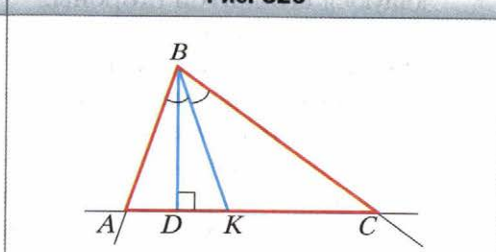


Рис. 326



1. С помощью каких инструментов выполняют геометрические построения? Какие построения можно ими выполнять?

2. Что значит решить задачу на построение?

Упражнения

574. Начертите: 1) острый угол; 2) тупой угол. Постройте угол, равный начерченному.

575. Начертите острый угол ABC и проведите луч DK. Постройте угол MDK такой, что $\angle MDK = 2\angle ABC$.

576. Разделите данный отрезок на четыре равные части.

577. Начертите произвольный угол. Разделите его на четыре равные части.

578. Постройте угол, равный: 1) $45°$; 2) $60°$; 3) $75°$; 4) $120°$.

579. Постройте угол, равный: 1) $30°$; 2) $22°30'$; 3) $15°$.

580. Начертите: 1) остроугольный треугольник; 2) тупоугольный треугольник. Постройте все высоты этого треугольника.

581. Начертите треугольник ABC. Постройте его: 1) высоту AM; 2) медиану BD; 3) биссектрису CK.

582. Через данную точку, не принадлежащую данной прямой, проведите прямую, параллельную данной.

583. Постройте треугольник:
1) по двум сторонам и углу между ними;
2) по стороне и двум прилежащим углам.

584. Постройте окружность данного радиуса, касающуюся данной прямой в данной точке.

585. Через данную точку, принадлежащую углу, проведите прямую, отсекающую на сторонах угла равные отрезки.

586. Постройте касательную к окружности, проходящую через данную точку окружности.

587. Постройте окружность, касающуюся сторон данного угла.

588. Дан угол, равный $30°$. Постройте окружность заданного радиуса с центром, принадлежащим одной из сторон данного угла, касающуюся его другой стороны.

589. Постройте окружность, касающуюся сторон данного угла, причём одной из них — в данной точке.

590. Постройте прямоугольный треугольник:
1) по двум катетам;
2) по гипотенузе и острому углу;
3) по катету и прилежащему острому углу.

591. Постройте прямоугольный треугольник по катету и противолежащему острому углу.

592. Постройте равнобедренный треугольник:

1) по боковой стороне и углу при вершине;
2) по высоте, опущенной на основание, и углу при вершине;
3) по основанию и медиане, проведённой к основанию;
4) по основанию и высоте, проведённой к боковой стороне.

593. Постройте равнобедренный треугольник:

1) по основанию и углу при основании;
2) по боковой стороне и углу при основании;
3) по боковой стороне и высоте, проведённой к основанию.

594. Постройте равнобедренный прямоугольный треугольник:

1) по катету;
2) по гипотенузе.

595. Постройте окружность, центром которой является данная точка на стороне данного острого угла и которая отсекает на другой стороне угла отрезок данной длины.

596. Как разделить пополам отрезок, длина которого в несколько раз больше наибольшего раствора циркуля?

597. Постройте прямоугольный треугольник:

1) по острому углу и биссектрисе этого угла;
2) по катету и высоте, проведённой к гипотенузе.

598. Постройте прямоугольный треугольник:

1) по катету и медиане, проведённой к другому катету;
2) по острому углу и высоте, проведённой из вершины прямого угла.

599. Постройте равнобедренный треугольник по основанию и радиусу вписанной окружности.

600. Постройте треугольник по стороне, прилежащему к ней углу и биссектрисе треугольника, проведённой из вершины этого угла.

601. Постройте треугольник по стороне, медиане, проведённой к одной из двух других сторон, и углу между данной стороной и медианой.

602. Постройте треугольник по стороне, прилежащему к ней острому углу и высоте, проведённой к данной стороне.

603. Постройте треугольник по двум сторонам и высоте, проведённой к одной из этих сторон. Сколько решений может иметь задача?

604. Постройте треугольник по стороне и проведённым из одного и того же конца этой стороны медиане и высоте. Сколько решений может иметь задача?

605. Постройте треугольник по высоте и двум углам, которые эта высота образует со сторонами треугольника, имеющими с высотой общую вершину. Сколько решений может иметь задача?

606. Постройте треугольник по двум сторонам и высоте, проведённой к третьей стороне. Сколько решений может иметь задача?

607. Постройте треугольник по двум сторонам и углу, противолежащему одной из этих сторон. Сколько решений может иметь задача?

608. Постройте треугольник по стороне, прилежащему углу и медиане, проведённой к данной стороне. Сколько решений может иметь задача?

609. Постройте треугольник по углу и высотам, проведённым из вершин двух других углов.

610. Постройте треугольник по двум высотам и углу, из вершины которого проведена одна из данных высот. Сколько решений может иметь задача?

611. Постройте прямоугольный треугольник по катету и радиусу вписанной окружности.

612. Постройте треугольник по стороне, прилежащему к ней углу и радиусу вписанной окружности.

613. Постройте треугольник по радиусу вписанной окружности и отрезкам, на которые точка касания вписанной окружности делит одну из сторон.

614. Постройте треугольник по стороне и проведённым к этой стороне высоте и медиане.

615. Постройте треугольник, если даны три точки, в которых вписанная окружность касается его сторон.

616. Как разделить на три равные части угол, равный 54°?

Упражнения для повторения

617. В треугольнике ABC известно, что $AB = BC$, AE и CF – биссектрисы этого треугольника. Докажите, что $EF \parallel AC$.

618. Определите углы треугольника ABC, если:
1) $\angle A + \angle B = 110^\circ$, а $\angle A + \angle C = 85^\circ$;
2) $\angle C - \angle A = 29^\circ$, а $\angle A + \angle C = 121^\circ$.

619. Серединный перпендикуляр гипотенузы AB прямоугольного треугольника ABC пересекает катет BC в точке M. Известно, что $\angle MAC : \angle MAB = 8 : 5$. Найдите острые углы треугольника ABC.

620. Внешний угол треугольника больше одного из углов треугольника, не смежного с ним:
1) на 60°, а другого – на 40°;
2) на 25°, а другого – на 35°.
Определите вид треугольника.

Наблюдайте, рисуйте, конструируйте, фантазируйте

621. На листе бумаги нарисовали равносторонний треугольник и полностью накрыли его двумя другими равносторонними треугольниками разных размеров. Докажите, что для покрытия хватило бы одного из этих треугольников.

§ 23. Метод геометрических мест точек в задачах на построение

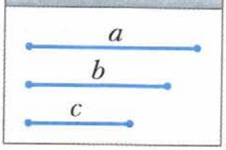
Известно, что если смешать синий и жёлтый цвета, то получим зелёный.

Пусть на плоскости надо найти точки, обладающие какими-то двумя свойствами одновременно. Если синим цветом покрасить точки, обладающие первым свойством, а жёлтым – обладающие вторым свойством, то понятно, что зелёные точки будут обладать сразу двумя свойствами. В этом и состоит идея метода ГМТ, которую проиллюстрируем следующими задачами.

Задача 1. Постройте треугольник по трём данным его сторонам.

Решение. Пусть даны три отрезка, длины которых равны a, b, c (рис. 327). Надо построить треугольник ABC, в котором $AB = c$, $AC = b$, $BC = a$.

Рис. 327



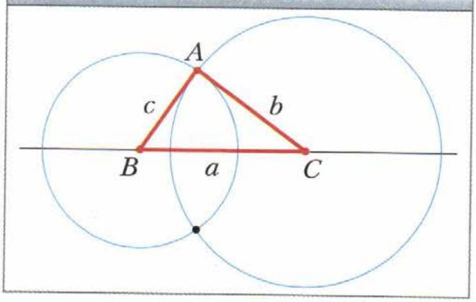
Проведём произвольную прямую. С помощью циркуля отложим на ней отрезок CB, равный a (рис. 328). Понятно, что задача свелась к построению третьей вершины треугольника, точки A.

Воспользуемся тем, что точка A обладает сразу двумя свойствами:

1) принадлежит геометрическому месту точек, удалённых от точки B на расстояние c, т. е. окружности с центром в точке B радиуса c (см. рис. 328);

2) принадлежит геометрическому месту точек, равноудалённых от точки C на расстояние b, т. е. окружности с центром в точке C радиуса b (см. рис. 328).

Рис. 328



В качестве точки A можно выбрать любую из двух образовавшихся зелёных точек.

Полученный треугольник ABC является искомым, так как в нём $AB = c$, $AC = b$, $BC = a$. ◄

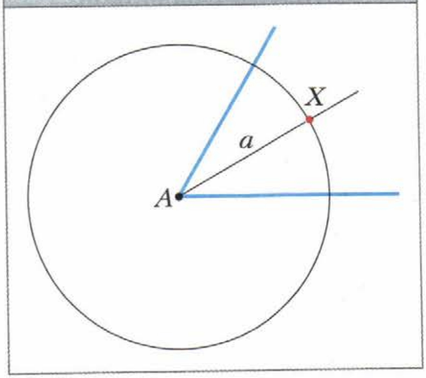
Из описанного построения следует, что *если каждый из трёх данных отрезков меньше суммы двух других, то эти отрезки могут служить сторонами треугольника.*

Задача 2. Постройте фигуру, все точки которой принадлежат данному углу, равноудалены от его сторон и находятся на заданном расстоянии a от его вершины.

Решение. Искомые точки принадлежат сразу двум геометрическим местам точек: биссектрисе данного угла и окружности с центром в его вершине и радиусом, равным a.

Построим биссектрису угла и указанную окружность (рис. 329). Их пересечением является искомая точка X. ◄

Рис. 329



Задача 3. Постройте центр окружности радиуса R, проходящей через данную точку M и касающуюся данной прямой a.

Решение. Поскольку окружность касается прямой a, то её центр находится на расстоянии R от этой прямой. Геометрическим местом точек, удалённых от данной прямой на данное расстояние, являются две параллельные прямые (см. упражнение 498). Следовательно, центр окружности находится на прямой b или на прямой c (рис. 330).

Геометрическое место точек, являющихся центрами окружностей радиуса R, проходящих через точку M, – это окружность данного радиуса с центром в точке M. Поэтому в качестве центра искомой окружности мож-

Рис. 330

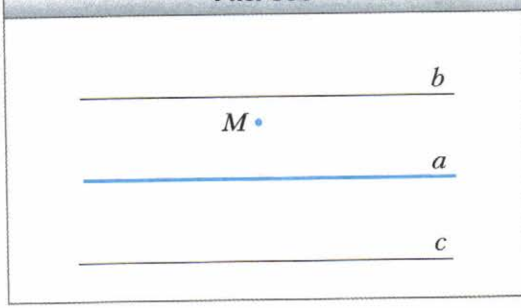
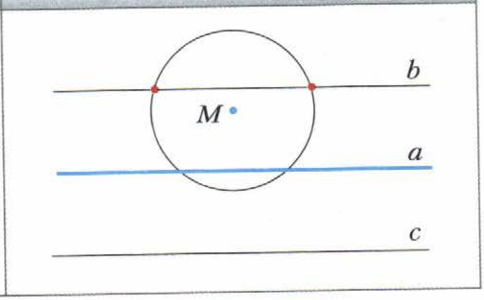


Рис. 331



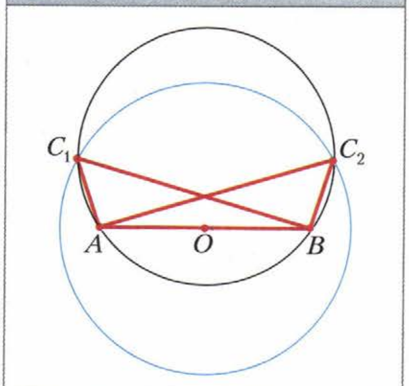
но выбрать любую из точек пересечения окружности с одной из прямых b или c (рис. 331).

Построение для случая, когда данная точка принадлежит данной прямой, рассмотрите самостоятельно. ◄

Задача 4. Постройте треугольник по стороне, медиане, проведённой к этой стороне, и радиусу описанной окружности.

Решение. Построим окружность данного радиуса и проведём хорду AB, равную стороне искомого треугольника. Тогда концы хорды являются двумя вершинами искомого треугольника. Понятно, что третья вершина принадлежит одновременно построенной окружности и окружности с центром в точке O, являющейся серединой хорды AB, и радиусом, равным данной медиане. Каждый из треугольников ABC_1 и ABC_2 (рис. 332) является искомым. Поскольку эти треугольники равны, то задача имеет единственное решение. ◄

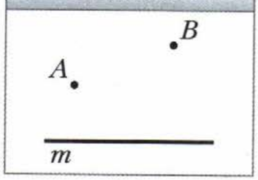
Рис. 332



Упражнения

622. Даны прямая m и точки A и B вне её (рис. 333). Постройте на прямой m точку, равноудалённую от точек A и B.

Рис. 333



623. Точки A и B принадлежат прямой m. Постройте точку, удалённую от прямой m на расстояние a и равноудалённую от точек A и B. Сколько решений имеет задача?

624. Точки B и C принадлежат разным сторонам угла A, причём $AB \neq AC$. Постройте точку M, принадлежащую углу, равноудалённую от его сторон и такую, что $MB = MC$.

625. Точки B и C принадлежат разным сторонам угла A. Постройте точку D, принадлежащую углу, равноудалённую от его сторон и такую, что $DC = BC$. Сколько решений может иметь задача?

626. Постройте равнобедренный треугольник по основанию и боковой стороне.

627. Для данной окружности постройте точку, являющуюся её центром.

628. Постройте окружность данного радиуса, проходящую через данную точку, центр которой принадлежит данной прямой.

629. Постройте окружность данного радиуса, проходящую через две данные точки.

630. Найдите все точки, принадлежащие данной окружности и равноудалённые от концов данного отрезка. Сколько решений может иметь задача?

631. Даны две пересекающиеся прямые m и n и отрезок AB. Постройте на прямой m точку, удалённую от прямой n на расстояние AB. Сколько решений имеет задача?

632. В треугольнике ABC известно, что $\angle C = 90°$. На катете AC постройте точку D, удалённую от прямой AB на расстояние CD.

633. Постройте равнобедренный треугольник по основанию и радиусу описанной окружности. Сколько решений может иметь задача?

634. Постройте треугольник по двум сторонам и медиане, проведённой к одной из данных сторон.

635. Постройте равнобедренный треугольник по боковой стороне и медиане, проведённой к боковой стороне.

636. На данной окружности постройте точку, находящуюся на данном расстоянии от данной прямой. Сколько решений может иметь задача?

637. На данной окружности постройте точку, равноудалённую от двух данных пересекающихся прямых. Сколько решений может иметь задача?

638. Между двумя параллельными прямыми дана точка. Постройте окружность, проходящую через эту точку и касающуюся данных прямых. Сколько решений имеет задача?

639. Постройте окружность, проходящую через данную точку A и касающуюся данной прямой m в данной точке B.

640. Даны две параллельные прямые и секущая. Постройте окружность, касающуюся этих трёх прямых.

641. Постройте треугольник по двум сторонам и радиусу описанной окружности. Сколько решений может иметь задача?

642. Постройте треугольник по стороне, высоте, проведённой к этой стороне, и радиусу описанной окружности. Сколько решений может иметь задача?

643. Постройте равносторонний треугольник по радиусу описанной окружности.

644. Три прямые попарно пересекаются и не проходят через одну точку. Постройте точку, равноудалённую от всех трёх прямых. Сколько решений имеет задача?

645. Постройте прямоугольный треугольник по катету и сумме гипотенузы и другого катета.

646. Постройте прямоугольный треугольник по гипотенузе и сумме катетов.

647. Постройте прямоугольный треугольник по гипотенузе и разности катетов.

648. Постройте прямоугольный треугольник по катету и разности гипотенузы и другого катета.

649. Постройте равнобедренный треугольник по основанию и разности боковой стороны и высоты, опущенной на основание.

650. Постройте треугольник по стороне, прилежащему к ней углу и сумме двух других сторон.

651. Постройте треугольник по стороне, прилежащему к ней углу и разности двух других сторон.

652. Постройте треугольник по стороне, противолежащему ей углу и разности двух других сторон.

653. Постройте треугольник по стороне, противолежащему ей углу и сумме двух других сторон.

654. Постройте треугольник по стороне, разности углов, прилежащих к этой стороне, и сумме двух других сторон.

655. Постройте треугольник по периметру и двум углам.

656. Постройте остроугольный треугольник по периметру, одному из углов и высоте, проведённой из вершины другого угла.

657. Постройте треугольник по высоте и медиане, проведённым из одной вершины, и радиусу описанной окружности.

658. Постройте треугольник по двум сторонам и медиане, проведённой к третьей стороне.

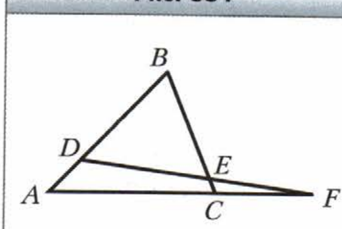
659. Постройте треугольник по стороне, высоте, проведённой к этой стороне, и медиане, проведённой к одной из двух других сторон.

Упражнения для повторения

660. На рисунке 334 $\angle A = 46°$, $\angle ACB = 68°$, $\angle DEC = 120°$. Найдите углы треугольников EFC и DBE.

661. Через середину O стороны MK треугольника MKN провели прямую, перпендикулярную стороне MK и пересекающую сторону MN в точке C. Известно, что $MC = KN$, $\angle N = 50°$. Найдите угол MCO.

Рис. 334



662. В треугольнике ABC из вершины прямого угла C провели высоту CH и биссектрису CM. Длина отрезка HM в 2 раза меньше длины отрезка CM. Найдите острые углы треугольника ABC.

663. На рисунке 335 $BD = DC$, $DN \perp BC$, $\angle BDM = \angle MDA$. Найдите сумму углов MBN и BMD.

Наблюдайте, рисуйте, конструируйте, фантазируйте

664. Разрежьте фигуру, изображённую на рисунке 336, на три части, не являющиеся квадратами, так, чтобы из этих частей можно было сложить квадрат.

Рис. 335

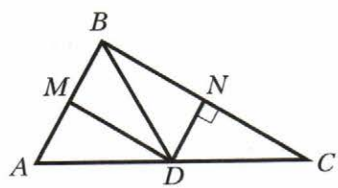
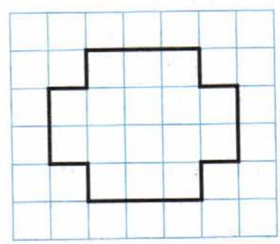


Рис. 336



Когда сделаны уроки

Из истории геометрических построений

Умение достигать результат, используя минимальные средства, всегда считалось признаком высокого мастерства. Видимо, поэтому в Древней Греции в значительной степени было развито искусство выполнять геометрические построения с помощью только двух инструментов: дощечки с ровным краем (линейки) и двух заострённых палочек, связанных на одном конце (циркуля). Такое ограничение в выборе инструментов историки связывают с древнегреческой традицией, считавшей прямую и окружность самыми гармоничными фигурами. Так, в своей книге «Начала» великий учёный Евклид описывал построения геометрических фигур, при которых использовались лишь циркуль и линейка.

Существует много задач на построение. С некоторыми из них вы уже успели познакомиться. Однако есть три задачи на построение, которые сыграли в развитии математики особую роль. Эти задачи стали знаменитыми.

Задача о квадратуре круга. Построить квадрат, площадь которого равна площади данного круга.

Задача о трисекции угла (от латинских *tria* – «три» и *section* — «разрезание»)**.** Разделить угол на три равные части.

Задача об удвоении куба. Построить куб, объём которого в 2 раза больше объёма данного куба.

Эти задачи занимали умы людей на протяжении тысячелетий. Их пытались решить и такие выдающиеся учёные древности, как Гиппократ Хиосский, Евдокс Книдский, Евклид, Эратосфен, Аполлоний Пергский, Герон, Папп, Платон, Архимед, и гении Нового времени Рене Декарт, Франсуа Виет, Исаак Ньютон. И лишь в середине XIX века была доказана их неразрешимость, т. е. невозможность выполнить указанные построения с использованием лишь циркуля и линейки. Этот результат был получен средствами не геометрии, а алгебры, благодаря переводу этих задач на язык уравнений.

Когда вы решали задачи на построение, особенно те, которые отмечены знаком ❋, вы, по-видимому, испытали сложности, связанные с ограниченностью набора инструментов. Поэтому предложение ещё больше сузить возможности применяемых приборов может показаться вам по меньшей мере неожиданным. Однако ещё в X веке персидский математик Мохаммед Абу-ль-Вефа описал решение целого ряда задач на построение с помощью линейки и циркуля, раствор которого нельзя было менять. Совсем удивительной является теорема, опубликованная в 1797 году итальянским математиком Лоренцо Маскерони (1750–1800): *всякое построение, выполнимое циркулем и линейкой, можно проделать одним циркулем.* При этом Маскерони обусловливал следующее: поскольку одним циркулем провести прямую нельзя, то прямая считается построенной, если построены какие-нибудь две её точки.

В XX веке была обнаружена книга датского учёного Георга Мора (1640–1697), в которой он также описал построения одним циркулем. Поэтому сформулированную выше теорему называют теоремой Мора – Маскерони.

Задание № 4 «Проверьте себя» в тестовой форме

1. Даны три точки, не лежащие на одной прямой. Сколько точек содержит геометрическое место точек, равноудалённых от данных?

А) бесконечно много В) одну
Б) две Г) ни одной

2. Даны три точки, лежащие на одной прямой. Сколько точек содержит геометрическое место точек, равноудалённых от данных?

А) одну Б) две В) бесконечно много Г) ни одной

3. Сколько точек содержит геометрическое место точек, принадлежащих углу и равноудалённых от его сторон и вершины?

А) 1 Б) 2 В) бесконечно много Г) ни одной

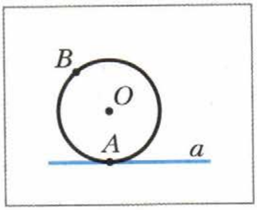
4. Точка X принадлежит окружности с центром O радиуса R. Какое из следующих утверждений неверно?

А) $OX \leq R$ Б) $OX \geq R$ В) $OX < R$ Г) $OX = R$

5. Прямая имеет две общие точки с окружностью с центром O радиуса R. Какую фигуру образуют все точки X данной прямой такие, что $OX \geq R$?

А) отрезок Б) два луча В) луч Г) прямую

6. На рисунке изображена прямая a, касающаяся окружности с центром O в точке A. На окружности отметили точку B, X – произвольная точка прямой a. Какое из следующих утверждений неверно?



А) $OX > OB$ В) $OX \geq OB$
Б) $OX \geq OA$ Г) $OA = OB$

7. Какое утверждение верно?

А) если две хорды перпендикулярны, то одна из них является диаметром

Б) если две хорды точкой пересечения делятся пополам, то они перпендикулярны

В) если касательная, проведённая через конец хорды, перпендикулярна ей, то эта хорда – диаметр

Г) если одна из хорд делит другую пополам, то эта хорда – диаметр

8. Центр описанной окружности треугольника – это точка пересечения

А) высот треугольника

Б) медиан треугольника

В) серединных перпендикуляров сторон треугольника
Г) биссектрис треугольника

9. Центр вписанной окружности треугольника – это точка пересечения
А) высот треугольника
Б) медиан треугольника
В) серединных перпендикуляров к сторонам треугольника
Г) биссектрис треугольника

10. Центры вписанной и описанной окружностей треугольника совпадают в
А) равнобедренном треугольнике
Б) равностороннем треугольнике
В) прямоугольном треугольнике
Г) разностороннем треугольнике

11. При решении задач на построение используют инструменты:
А) циркуль, транспортир, линейку
Б) линейку, угольник
В) линейку, угольник, циркуль, транспортир
Г) циркуль, линейку

Итоги главы 4

Геометрическое место точек (ГМТ)

Геометрическим местом точек (ГМТ) называют множество всех точек, обладающих определённым свойством.

Серединный перпендикуляр отрезка как ГМТ

Серединный перпендикуляр отрезка является геометрическим местом точек, равноудалённых от концов этого отрезка.

Биссектриса угла как ГМТ

Биссектриса угла является геометрическим местом точек, принадлежащих углу и равноудалённых от его сторон.

Окружность

Окружностью называют геометрическое место точек, равноудалённых от заданной точки.

Круг

Кругом называют геометрическое место точек, расстояние от которых до заданной точки не больше данного положительного числа.

Хорда окружности

Отрезок, соединяющий две точки окружности, называют хордой окружности.

Диаметр окружности

Хорду, проходящую через центр окружности, называют диаметром.

Свойства окружности

Диаметр окружности, перпендикулярный хорде, делит эту хорду пополам.

Диаметр окружности, делящий пополам хорду, отличную от диаметра, перпендикулярен этой хорде.

Касательная к окружности

Прямую, имеющую с окружностью только одну общую точку, называют касательной к окружности.

Свойство касательной

Касательная к окружности перпендикулярна радиусу, проведённому в точку касания.

Признак касательной к окружности

Если прямая, проходящая через точку окружности, перпендикулярна радиусу, проведённому в эту точку, то эта прямая является касательной к данной окружности.

Если расстояние от центра окружности до некоторой прямой равно радиусу окружности, то эта прямая является касательной к данной окружности.

Окружность, описанная около треугольника

Окружность называют описанной около треугольника, если она проходит через все вершины этого треугольника.

Около любого треугольника можно описать окружность.

Центр окружности, описанной около треугольника

Центр окружности, описанной около треугольника, — это точка пересечения серединных перпендикуляров его сторон.

Окружность, вписанная в треугольник

Окружность называют вписанной в треугольник, если она касается всех его сторон.

В любой треугольник можно вписать окружность.

Центр окружности, вписанной в треугольник

Центр окружности, вписанной в треугольник, — это точка пересечения его биссектрис.

Дружим с компьютером

Изучая математику в 5 и 6 классах, вы уже пользовались компьютером и оценили, каким надёжным помощником он может быть. Поможет он и в изучении геометрии.

Вы, наверное, уже умеете пользоваться **калькулятором** для вычислений, набирать и оформлять несложные тексты в **текстовом редакторе** (например, Microsoft Word), составлять таблицы с помощью **редактора таблиц** (например, Microsoft Excel), рисовать с помощью **графического редактора** (например, Paint), пользоваться глобальной сетью **Интернет** и искать в ней информацию.

Все эти умения вы будете совершенствовать и при изучении геометрии.

Геометрия изучает фигуры: отрезки, треугольники, прямоугольники, прямоугольные параллелепипеды, шары и т. п. Поэтому полезно научиться пользоваться графическим редактором, с помощью которого можно работать с геометрическими фигурами и строить чертежи. Примерами таких редакторов могут быть CorelDraw, Visio и т. п. Выберите при помощи учителя графический редактор для выполнения чертежей к заданиям этого раздела. Кроме этих заданий, вы можете с помощью этого графического редактора иллюстрировать задачи, которые решаете. А если захотите сделать доклад или интересное сообщение для товарищей, то можете с помощью **программ для построения презентаций** (например, PowerPoint) сделать целый мультфильм «Из жизни геометрических фигур».

Существует много программ, созданных специально для школьников и предназначенных для помощи в изучении математики. Вот ссылки на некоторые из таких программ:

http://www.pcmath.ru/?parent=1&page=1

http://obr.1c.ru/catalog.jsp?top=3

http://school-collection.edu.ru/catalog/rubr/903077b7-0221-4823-b549-b236326d48d4/114760/?

http://www.dgeometry.ru/links/2d.html

Здесь есть и мультимедийные образовательные программы, и программы, позволяющие выполнять геометрические построения с помощью компьютера, и советы по применению компьютера в геометрии. Конечно, это далеко не всё, что есть на просторах Интернета. Ищите, интересуйтесь, общайтесь со своими сверстниками, и вы найдёте много интересного. А может, став постарше, вы и сами разработаете полезные программы для изучения геометрии.

Задания «Дружим с компьютером»

Задания «**Дружим с компьютером**» вы сможете выполнять с помощью компьютера по мере изучения соответствующих тем. Большинство из них – задания на построение геометрических фигур, которые вы будете выполнять с помощью выбранного графического редактора.

Точки и прямые

1. Освойте в графическом редакторе инструменты для изображения точек и прямых, научитесь проводить прямую через две точки.

2. Освойте инструмент, позволяющий подписывать точки и прямые прописными и строчными буквами латинского алфавита.

Отрезок и его длина

3. Изобразите две точки, постройте отрезок, концами которого являются две заданные точки.

4. Найдите, каким образом графический редактор указывает длину отрезка.

5. Постройте отрезок заданной длины.

6. Найдите инструмент, с помощью которого можно перемещать и поворачивать фигуры.

7. Постройте два отрезка одинаковой длины и совместите их наложением.

8. Постройте чертёж, который иллюстрирует основное свойство длины отрезка. Проверьте, выполняется ли это свойство, определив длины построенных отрезков.

9. Есть ли в выбранном вами графическом редакторе средство для нахождения середины отрезка?

Луч. Угол. Измерение углов

10. Постройте несколько различных углов. Найдите инструмент, с помощью которого можно определять величину угла и строить углы заданной величины.

11. Постройте чертёж, который иллюстрирует основное свойство величины угла. Проверьте, выполняется ли это свойство, определив величины построенных углов.

12. Найдите инструмент, который позволяет рисовать дуги. Нарисуйте несколько углов и отметьте равные углы равным количеством дуг. Обратите внимание на то, что на рисунках основные и вспомогательные линии имеют разную толщину. Найдите инструмент, позволяющий выбирать толщину линии.

Смежные и вертикальные углы

13. Изобразите смежные и вертикальные углы.

Перпендикулярные прямые

14. Найдите в графическом редакторе инструмент, предназначенный для построения перпендикулярных прямых. Постройте с помощью этого инструмента прямой угол.

15. Нарисуйте прямую и точку, лежащую на данной прямой. Проведите через эту точку прямую, перпендикулярную данной.

16. Нарисуйте прямую и точку, не лежащую на данной прямой. Проведите через эту точку прямую, перпендикулярную данной.

Равные треугольники. Высота, медиана, биссектриса треугольника

17. Обычно, чтобы нарисовать треугольник, рисуют три отрезка, представляющие его стороны. Нарисуйте эти три отрезка. Найдите инструмент, который позволяет «склеить» эти три отрезка и далее рассматривать их как единую фигуру – треугольник.

18. Нарисуйте остроугольный, прямоугольный и тупоугольный треугольники.

19. Найдите инструмент, который позволяет копировать уже нарисованную фигуру, и инструмент, который позволяет перемещать и поворачивать фигуры. С помощью этих инструментов создайте несколько равных треугольников.

20. Постройте произвольный треугольник и из каждой его вершины проведите высоту, медиану, биссектрису. Какие инструменты вы используете для того, чтобы построение было точным? Выполните такое построение для остроугольного, прямоугольного и тупоугольного треугольников.

Первый и второй признаки равенства треугольников

21. Постройте два треугольника, у которых две стороны и угол между ними соответственно равны. Как продемонстрировать, что построенные треугольники равны?

22. Нарисуйте отрезок и постройте его серединный перпендикуляр.

23. Постройте два треугольника, у которых сторона и два прилежащих к ней угла соответственно равны. Как продемонстрировать, что построенные треугольники равны?

Равнобедренный треугольник и его свойства

24. Постройте равнобедренный и равносторонний треугольники. Какие возможности графического редактора облегчат построение?

Признаки равнобедренного треугольника

25. Каким образом использовать теорему 10.3 для построения равнобедренного треугольника?

Третий признак равенства треугольников

26. Постройте рисунок, иллюстрирующий свойство серединного перпендикуляра. Выберите на серединном перпендикуляре несколько точек. С помощью какого инструмента можно проверить, что эти точки равноудалены от концов отрезка?

Параллельные прямые

27. Выполняя задания предыдущих пунктов, вы освоили инструмент, который позволяет копировать уже построенные фигуры, и инструмент, позволяющий перемещать их. Как с помощью этих инструментов построить параллельные прямые?

28. Придумайте, как строить параллельные прямые, используя теорему 13.1.

29. Нарисуйте прямую и точку, ей не принадлежащую. Проведите через эту точку прямую, параллельную данной. Увеличьте полученный рисунок. Может ли этот рисунок убедительно проиллюстрировать аксиому параллельности прямых? Почему?

Этот пример показывает, что все геометрические построения, которые мы можем выполнить либо на бумаге, либо с помощью компьютера, достаточно условны. Поэтому, даже сделав прекрасный рисунок, надо полагаться не на него, а на математические факты и доказательства.

Признаки параллельности двух прямых

30. Используя теоремы 14.1–14.3, постройте несколько пар параллельных прямых. Как, используя инструменты графического редактора, показать, что эти прямые действительно получились параллельными?

Свойства параллельных прямых

31. Сделайте несколько рисунков, иллюстрирующих свойства параллельных прямых. С помощью инструментов графического редактора покажите, что эти свойства выполняются.

32. Нарисуйте две параллельные прямые. Как определить расстояние между ними?

Сумма углов треугольника

33. Нарисуйте произвольный треугольник. Постройте все его внешние углы.

Прямоугольный треугольник

34. Нарисуйте прямоугольный треугольник и отметьте его прямой угол «уголком» с использованием тонких линий (см. рис. 256).

35. Постройте пары треугольников, иллюстрирующие признаки равенства прямоугольных треугольников. Отметьте на рисунке равные стороны одинаковым количеством чёрточек, а равные углы — одинаковым количеством дуг.

Свойства прямоугольного треугольника

36. Постройте прямоугольный треугольник, острый угол которого равен 30°. Проверьте, выполняются ли для него утверждения теоремы 18.1.

Геометрическое место точек. Окружность и круг

37. Освойте инструмент для рисования окружностей и кругов. Как отличаются изображения окружности и круга? Какой инструмент нужен, чтобы из изображения окружности сделать изображение круга?

38. Нарисуйте окружность, проведите её хорду и диаметр. Какой элемент изображения окружности нужен, чтобы точно провести диаметр?

Некоторые свойства окружности. Касательная к окружности

39. Нарисуйте окружность и отметьте на ней точку. Какие инструменты надо использовать, чтобы провести касательную к окружности в этой точке?

Описанная и вписанная окружности треугольника

40. Нарисуйте произвольный треугольник. Постройте его вписанную и описанную окружности, не пользуясь теоретическим материалом параграфа 21. Теперь постройте эти же окружности, пользуясь следствиями 2 из теорем 21.1 и 21.2. Получилось ли это построение быстрее и точнее?

Задачи на построение

41. В задачах на построение используют циркуль и линейку. Если вы хотите провести построение с помощью графического редактора, то какие инструменты графического редактора можно использовать вместо циркуля и линейки?

Метод геометрических мест точек в задачах на построение

42. Освойте инструмент, позволяющий изображать различные геометрические фигуры различными цветами.

43. Есть ли в выбранном вами графическом редакторе инструмент, позволяющий автоматически находить пересечение нарисованных геометрических фигур?

Проектная работа

Эта рубрика адресована прежде всего тем, кто хочет научиться приобретать знания самостоятельно, творчески мыслить, формировать, выражать и отстаивать свою точку зрения, выдвигать гипотезы, находить наиболее рациональные и нестандартные решения.

Первым шагом, который может помочь в реализации этих целей, является участие в проектной работе.

Проект – это самостоятельное исследование по выбранной теме, которое можно выполнять как индивидуально, так и в группе.

Дадим несколько советов по организации работы над проектом и оформлению результатов исследования.

1. При выборе темы необходимо учитывать её актуальность, наличие источников информации в литературе и интернет-ресурсов. Здесь важно ваше желание проявить себя в качестве исследователя в работе именно над выбранной темой.

2. Работу начинают с составления предварительного плана, в котором отражаются замысел и этапы реализации задуманного. После знакомства с основными источниками и литературой при помощи руководителя проекта составляют окончательный план.

3. Важно чётко сформулировать цели исследования. Они могут быть записанными в такой форме: изучить, описать, проанализировать, доказать, сравнить и т. п.

4. Работа завершается подведением итогов исследования, делаются выводы, намечаются перспективы дальнейшего изучения темы.

5. Примерный объём работы – 10–15 страниц. Дополнительно может прилагаться иллюстративный материал.

6. Работа может быть оформлена в виде реферата, доклада, компьютерной презентации.

Ниже приводится рекомендуемый список тем, которые могут быть выбраны для проектной работы.

1. Геометрия вокруг нас

Рекомендуемые литература и интернет-ресурсы

1. *Депман И.Я., Виленкин Н.Я.* За страницами учебника математики : пособие для учащихся 5–6 классов средней школы. – М. : Просвещение, 1989.

2. *Шарыгин И.Ф., Ерганжиева Л.Н.* Наглядная геометрия : учебное пособие для учащихся 5–6 классов. – М. : Дрофа, 2002.

3. *Энциклопедический* словарь юного натуралиста / сост. А.Г. Рогожкин. – М. : Педагогика, 1981.

4. *Энциклопедия* для детей. Математика. – М. : Аванта +, 2003. Т. 11.

5. http://ilib.mccme.ru/djvu/geometry/geom_rapsodiya.htm/ – Левитин К.Ф. Геометрическая рапсодия.

6. http://www.edu.ru/ – Российское образование. Федеральный портал.

7. http://www.kvant.info/ – Научно-популярный физико-математический журнал для школьников и студентов «Квант».

8. http://www.math.ru/lib/ – Электронная библиотека книг по математике.

2. Ножницы в руках геометра

Рекомендуемые литература и интернет-ресурсы

1. *Байиф Ж.-К.* Логические задачи. – М. : Мир, 1983.

2. *Гарднер М.* Математические головоломки и развлечения. – М. : Мир, 1999.

3. *Данилов Ю.* Головоломки художника Громова // Квант. – 1977. – № 2.

4. *Данилов Ю.* Стомахион // Квант. – 1978. – № 8.

5. *Екимова М.А., Кукин Г.П.* Задачи на разрезание. – М. : МЦНМО, 2002.

6. *Савин А.* Задачи на разрезание // Квант. – 1987. – № 7.

7. http://www.math.ru/lib/ – Электронная библиотека книг по математике.

3. Геометрия и искусство

Рекомендуемые литература и интернет-ресурсы

1. *Пидоу Д.* Геометрия и искусство. – М. : Мир, 1979.

2. *Энциклопедия* для детей. Математика. – М. : Аванта +, 2003. Т. 11.

3. http://www.edu.ru/ – Российское образование. Федеральный портал.

4. http://www.kvant.info/ – Научно-популярный физико-математический журнал для школьников и студентов «Квант».

5. http//pictoris.ru/ – Геометрия как искусство (сборник статей).

4. Евклид и его великая книга «Начала»

Рекомендуемые литература и интернет-ресурсы

1. *Глейзер Г.И.* История математики в школе: VII–VIII кл. – М. : Просвещение, 1982.

2. *Энциклопедия* для детей. Математика. – М. : Аванта +, 2003. Т. 11.

3. http://www.100velikih.com/view1006.html/ – Евклид. Начала.

4. http://ru.wikipedia.org/wiki/ – Математика в Древней Греции.

5. http://ilib.mirror1.mccme.ru/djvu/geometry/nachala.htm/ – Евклид. Начала.

5. Геометрия — одна из самых древних наук

Рекомендуемые литература и интернет-ресурсы

1. *Глейзер Г.И.* История математики в школе: VII–VIII кл. – М. : Просвещение, 1982.

2. *История* математики / под редакцией А.П. Юшкевича. – М. : Наука, 1970.

3. *Энциклопедия* для детей. Математика. – М. : Аванта +, 2003. Т. 11.

4. http://isgeom.narod.ru/index.html/ – История элементарной геометрии.

6. Три знаменитых задачи древности — трисекция угла, квадратура круга, удвоение куба

Рекомендуемые литература и интернет-ресурсы

1. *Прасолов В.В.* Три классические задачи на построение : удвоение куба, трисекция угла, квадратура круга. – М. : Наука, 1992.

2. *Энциклопедия* для детей. Математика. – М. : Аванта +, 2003. Т. 11.

3. http://ru.wikipedia.org/wiki/ – Квадратура_круга.

4. http://hijos.ru/2011/03/23/trisekciya-ugla/ – Трисекция угла.

5. http://isgeom.narod.ru/str7.html/ – Решение трёх знаменитых задач древности.

7. Одна задача — два решения

Рекомендуемые литература и интернет-ресурсы

1. *Понарин Я.П.* Задача одна – решений много // Математика в школе. – 1992. – № 1.

2. *Готман Э.Г., Скопец З.А.* Задача одна – решения разные. – Киев : Радянська школа, 1983.

3. http://www.kvant.info/ – Научно-популярный физико-математический журнал для школьников и студентов «Квант».

4. http://school-collection.edu.ru/ – Единая коллекция цифровых образовательных ресурсов.

8. Метод ГМТ в задачах на построение

Рекомендуемые литература и интернет-ресурсы

1. *Блинков А.Д., Блинков Ю.А.* Геометрические задачи на построение. – М. : МЦНМО, 2010.

2. http://school.xvatit.com/index.php?title=Геометрическое_место_точек._Полные_уроки/ – Геометрическое место точек.

3. http://www.math.ru/lib/ – Электронная библиотека книг по математике.

4. http://www.problems.ru/ – Задачи из разных разделов математики.

Упражнения для повторения курса 7 класса

Простейшие геометрические фигуры и их свойства

665. Отрезок, длина которого равна a, разделили на пять равных отрезков. Найдите расстояние между серединами крайних отрезков.

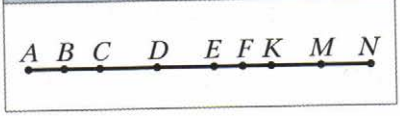
666. Точка C – середина отрезка AB, $AB = 10$ см. На прямой AB найдите все точки X такие, что $AX + BX + CX = 12$ см.

667. Точка D – середина отрезка MK, $MK = 16$ см. На прямой MK найдите все точки Y такие, что $MY + KY + DY = 30$ см.

668. На прямой отметили 10 точек: A, B, C, D, E, F, M, N, K, P. Сколько при этом образовалось отрезков, одним из концов которых является точка A? Сколько всего образовалось отрезков с концами в отмеченных точках? Зависит ли общее количество отрезков от того, лежат ли отмеченные точки на одной прямой?

669. На рисунке 337 $AN = 24$ см, $AB = BC$, $CD = DE$, $EF = FK$, $KM = MN$, $DF = 6$ см. Найдите длину отрезка BM.

Рис. 337



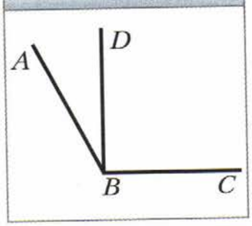
670. Начертите угол MKE, равный 120°. Проведите луч KC так, чтобы $\angle MKC = 60°$. Найдите угол CKE и укажите его вид. Сколько решений имеет задача?

671. Градусные меры смежных углов ABC и CBD относятся как 5 : 4. Найдите угол между биссектрисами углов ABC и ABD. Сколько решений имеет задача?

672. Два угла имеют общую сторону и не имеют других общих точек. Являются ли эти углы смежными, если: 1) их величины относятся как 11 : 19 и один из углов на 32° больше другого; 2) их величины относятся как 7 : 3 и один из углов на 72° меньше другого?

673. На рисунке 338 $BD \perp BC$. Угол между биссектрисами углов ABD и DBC равен 55°. Найдите угол ABD.

Рис. 338



Треугольники

674. Периметр треугольника равен 87 см, одна из сторон – a см, другая – b см. Составьте выражение для нахождения третьей стороны. Вычислите длину третьей стороны, если $a = 27$, $b = 21$.

675. Найдите периметр треугольника ABC, если $AB + BC = 27$ см, $AB + AC = 28$ см, $BC + AC = 29$ см.

676. На рисунке 339 $\angle 1 = \angle 2$, $\angle 3 = \angle 4$, $AD = CF$. Докажите, что $\Delta ABC =$ $= \Delta DEF$.

677. В треугольниках ABC и DEF проведены медианы BM и EK соответственно. Известно, что $BC = EF$, $\angle ABC = \angle DEF$, $\angle C = \angle F$. Докажите, что: 1) $\Delta BMC = \Delta EFK$; 2) $\Delta ABM = \Delta DEK$.

678. В остроугольных треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ проведены высоты BD и B_1D_1 соответственно. Докажите, что $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$, если $BD = B_1D_1$, $AD = A_1D_1$, $CD = C_1D_1$.

679. В треугольниках ABC и MKE известно, что $AB = MK$, $BC = KE$, $\angle B = \angle K$. На отрезке AB отметили точку F, а на отрезке MK – точку P так, что $\angle ACF = \angle MEP$. Какова длина отрезка CF, если $PE =$ $= 15$ см?

680. В треугольниках ABC и DEF $AC = DF$, $BC = EF$, $\angle C = \angle F$. Биссектрисы углов BAC и ABC пересекаются в точке O, а биссектрисы углов DEF и EDF – в точке M. Докажите, что $\Delta AOB = \Delta DME$.

681. На продолжении основания BC равнобедренного треугольника ABC за точку B отметили точку M такую, что $\angle MBA = 128°$. Найдите угол между боковой стороной AC и биссектрисой угла ACB.

682. Из точек A и B, лежащих в одной полуплоскости относительно прямой m, опущены на эту прямую перпендикуляры AC и BD соответственно. Точки A и B равноудалены от прямой m, точка O – середина отрезка CD. Докажите, что ΔAOB – равнобедренный.

683. На рисунке 340 $AB = BC$, $AD = FC$, $\angle ADE = \angle CFE$. Докажите, что точка E – середина отрезка AC.

684. Равнобедренные треугольники ABC и ADC имеют общее основание AC. Докажите, что прямая BD – серединный перпендикуляр отрезка AC.

685. На рисунке 341 $AB = BC$, $\angle ABO = \angle CBO$. Докажите, что $\angle DAO =$ $= \angle DCO$.

Рис. 339

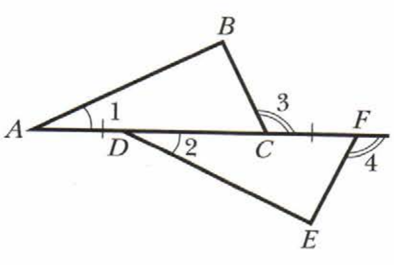


Рис. 340

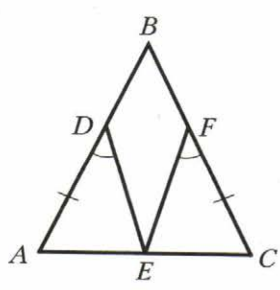
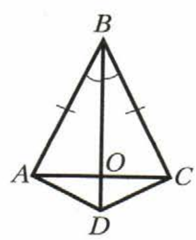
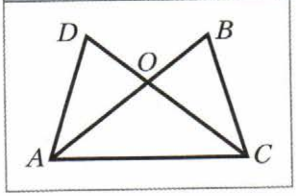


Рис. 341



686. На рисунке 342 $OA = OC$, $OD = OB$. Докажите, что $\angle DAC = \angle BCA$.

Рис. 342

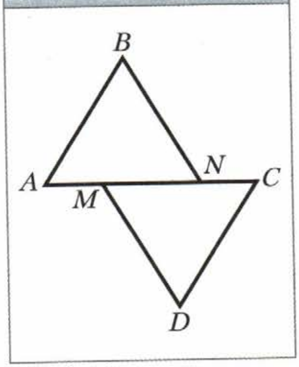


687. Точка O – точка пересечения серединных перпендикуляров сторон AC и BC треугольника ABC – принадлежит его стороне AB. Докажите, что: 1) точка O – середина отрезка AB; 2) $\angle ACB = \angle A + \angle B$.

688. Медиана треугольника ABC разбивает его на два треугольника, периметры которых равны. Докажите, что треугольник ABC – равнобедренный.

689. В треугольнике ABC известно, что $AB = BC$, BD – медиана. Периметр треугольника ABC равен 50 см, а треугольника ABD – 40 см. Найдите длину медианы BD.

Рис. 343



690. На сторонах AC и BC треугольника ABC отметили точки F и K соответственно. Докажите, что если треугольники AFB и AKB равны и стороны AK и BF соответственные, то треугольник ABC – равнобедренный.

691. На рисунке 343 $AM = CN$, $AB = CD$, $BN = DM$. Докажите, что $\angle ABN = \angle CDM$.

692. В треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ медианы AM и A_1M_1 равны, $AB = A_1B_1$, $BC = B_1C_1$. Докажите, что $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$.

Параллельные прямые. Сумма углов треугольника

693. Через точку, не принадлежащую прямой a, провели три прямые. Докажите, что по крайней мере две из этих прямых пересекают прямую a.

694. На сторонах AB и AC треугольника ABC отметили соответственно точки M и K так, что $\angle AMK = \angle ABC$. Докажите, что $\angle AKM = \angle ACB$.

695. Докажите, что:

1) биссектрисы накрест лежащих углов, образованных при пересечении двух параллельных прямых секущей, параллельны;

2) биссектрисы односторонних углов, образованных при пересечении двух параллельных прямых секущей, перпендикулярны.

696. Каково взаимное расположение биссектрис соответственных углов, образованных при пересечении двух параллельных прямых секущей?

697. Прямая, проведённая через вершину треугольника параллельно его противолежащей стороне, образует с двумя другими сторонами равные углы. Докажите, что данный треугольник – равнобедренный.

698. На продолжении боковых сторон AC и BC равнобедренного треугольника ABC за вершину C отметили точки E и D соответственно так, что $DE \parallel AB$. Докажите, что ΔCDE – равнобедренный.

699. На стороне BC треугольника ABC отметили точки M и K (точка M лежит между точками B и K) так, что $\angle KAC = \angle B$, $\angle BAM = \angle C$. Докажите, что ΔMAK – равнобедренный.

700. Высота равнобедренного треугольника, проведённая к основанию, в 2 раза меньше этого основания. Найдите углы данного треугольника.

701. На стороне AC треугольника ABC отметили точку O так, что $AB = AO$. Известно, что внешний угол треугольника ABC при вершине A равен $160°$ и $\angle C = 40°$. Докажите, что $BO = CO$.

702. На продолжениях стороны AC треугольника ABC за точки A и C отметили соответственно точки M и K так, что $AM = AB$, $CK = BC$. Найдите углы треугольника MBK, если $\angle BAC = 60°$, $\angle ACB = 80°$.

703. Прямая, параллельная стороне AC треугольника ABC, пересекает его стороны AB и BC в точках M и K соответственно так, что $AM = MK$. Известно, что $\angle B = 65°$, $\angle C = 45°$. Найдите угол KAC.

704. В треугольнике ABC известно, что $\angle A = 55°$, $\angle B = 75°$. Найдите угол между высотой и биссектрисой треугольника, проведёнными из вершины C.

705. Высоты AD и BK равнобедренного треугольника ABC ($AB = BC$) пересекаются в точке H, $\angle AHB = 128°$. Найдите углы треугольника ABC.

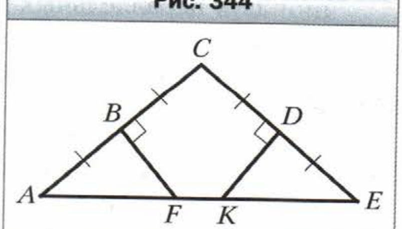
706. Высоты AD и CM равнобедренного треугольника ABC ($AB = BC$) пересекаются в точке H, $\angle AHC = 140°$. Найдите углы треугольника ABC.

707. Один из острых углов прямоугольного треугольника равен $42°$. Найдите меньший из углов, образованных биссектрисой прямого угла и гипотенузой.

708. Из точек C и D, лежащих в одной полуплоскости относительно прямой m, опущены перпендикуляры CE и DF на эту прямую, $CF = DE$. Докажите, что $CE = DF$.

709. На рисунке 344 $AB = BC = CD = DE$, $BF \perp AC$, $DK \perp CE$. Докажите, что $AF = EK$.

Рис. 344



710. Высоты BM и CK треугольника ABC пересекаются в точке H, $\angle ABC = 35°$, $\angle ACB = 83°$. Найдите $\angle BHC$.

711. Угол между высотой и биссектрисой прямоугольного треугольника, проведёнными из вершины его прямого угла, равен 12°. Найдите острые углы данного треугольника.

712. На гипотенузе AB прямоугольного равнобедренного треугольника ABC отметили точки M и K так, что $AC = AM$ и $BC = BK$. Найдите $\angle MCK$.

713. Из вершины прямого угла треугольника опустили высоту на гипотенузу. Докажите, что два треугольника, образовавшиеся при этом, и данный треугольник имеют соответственно равные острые углы.

714. В треугольниках ABC и DEF известно, что $\angle A = \angle D$, $\angle B = \angle E$, высоты BM и EK равны. Докажите, что $\Delta ABC = \Delta DEF$.

715. Высоты AM и CK треугольника ABC пересекаются в точке O, $OK = OM$, $\angle BAM = \angle ACK$. Докажите, что треугольник ABC – равносторонний.

716. Две высоты равнобедренного треугольника при пересечении образуют угол 100°. Найдите углы данного треугольника.

717. В треугольнике ABC угол ACB – прямой, CH – высота данного треугольника, CD – биссектриса треугольника BCH. Докажите, что $AC = AD$.

718. Угол между высотой и биссектрисой равнобедренного треугольника, проведёнными из одной вершины, равен 15°. Найдите углы данного треугольника. Сколько решений имеет задача?

719. На продолжениях гипотенузы AB прямоугольного треугольника ABC за точки A и B отметили соответственно точки D и E так, что $AC = AD$, $BC = BE$. Найдите угол DCE.

720. В равностороннем треугольнике ABC из середины M стороны AC опущен перпендикуляр MK на сторону BC. Найдите периметр треугольника ABC, если $KC = 3$ см.

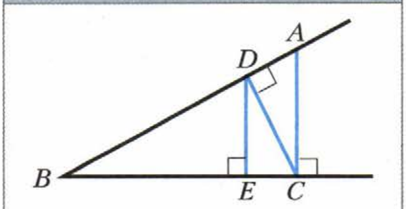
721. Один из углов прямоугольного треугольника равен 60°, а сумма гипотенузы и меньшего катета – 27 см. Найдите эти стороны треугольника.

722. В треугольнике ABC известно, что $\angle C = 90°$, $\angle A = 15°$, $BC = 11$ см. На катете AC отметили точку M так, что $\angle BMC = 30°$. Найдите отрезок AM.

723. На одной стороне угла B отметили точки D и A, а на другой – точки E и C (рис. 345) так, что $AC \perp BC$, $DE \perp BC$, $CD \perp AB$. Найдите отрезок DE, если $\angle B = 30°$, $AC = 12$ см.

724. Найдите угол между прямыми, на которых лежат две медианы равностороннего треугольника.

Рис. 345



Окружность и круг. Геометрические построения

725. Отрезки AC, AB и BC – соответственно диаметр и хорды окружности с центром O, причём $AB = BC$. Найдите $\angle AOB$.

726. Диаметры AB и CD окружности с центром O перпендикулярны. На диаметре AB по разные стороны от центра O отметили точки E и F так, что $CE = DF$. Докажите, что $OE = OF$.

727. Отрезки MK и NP – непараллельные хорды окружности с центром O, $MK = NP$, точки A и B – середины хорд MK и NP соответственно. Докажите, что $\angle OAB = \angle OBA$.

728. Каждая из хорд AB и BC равна радиусу окружности. Найдите $\angle ABC$.

729. Докажите, что касательные к окружности, проведённые через концы диаметра, параллельны.

730. Диаметр AB делит каждую из хорд MN и PK, отличных от диаметра, пополам. Докажите, что $MN \parallel PK$.

731. Докажите, что центр окружности равноудалён от любой касательной к окружности.

732. Через точку A к окружности с центром O проведены касательные AM и AK, M и K – точки касания. Точка пересечения отрезка OA с окружностью является серединой этого отрезка. Найдите $\angle MAK$.

733. Прямая, параллельная хорде AC окружности, касается этой окружности в точке B. Докажите, что ΔABC – равнобедренный.

734. Радиус OC окружности с центром O делит пополам хорду AB, не являющуюся диаметром. Через точку C провели касательную к окружности. Докажите, что эта касательная параллельна хорде AB.

735. Окружность, центр которой принадлежит биссектрисе угла, пересекает каждую из его сторон в двух точках. Докажите, что отрезки, которые отсекает окружность на сторонах угла, равны.

736. Через точку M проведены касательные MK и ME к окружности с центром в точке O, где K и E – точки касания, $\angle OMK = 30°$, $MK = 6$ см. Найдите длину хорды KE.

737. Докажите, что хорда окружности, которая перпендикулярна другой хорде этой окружности и проходит через её середину, является диаметром данной окружности.

738. Отрезки AB, AC и BD – соответственно диаметр и хорды окружности, причём $AC \parallel BD$. Докажите, что отрезок CD – диаметр окружности.

739. В треугольнике ABC $AB = BC$, точка O – центр вписанной окружности, точки D и E – точки касания вписанной окружности со сторонами AC и AB соответственно, $\angle ABC = 48°$. Найдите $\angle DOE$.

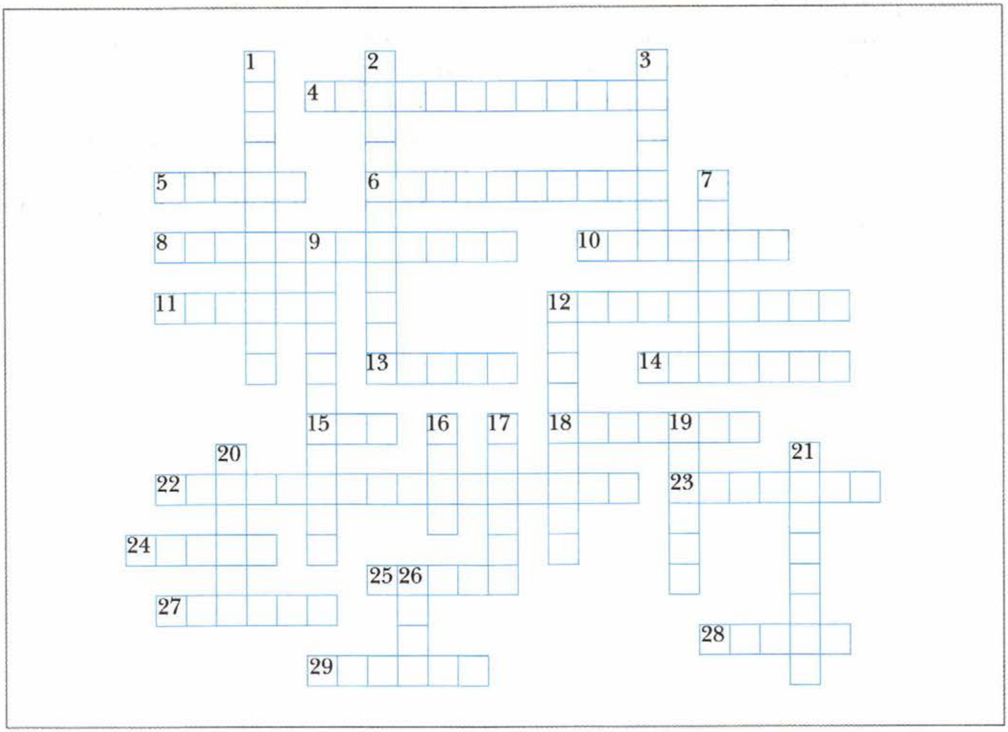
740. Окружность, вписанная в треугольник ABC, касается его сторон AB, BC и AC в точках K, M и E соответственно, $AK = BM = CE$. Докажите, что треугольник ABC – равносторонний.

741. Биссектрисы AD и CE треугольника ABC пересекаются в точке O_1, биссектрисы EF и DK треугольника DEB пересекаются в точке O_2. Докажите, что точки B, O_1 и O_2 лежат на одной прямой.

742. Через вершину данного угла проведите вне его прямую так, чтобы она образовала со сторонами этого угла равные углы.

743. Через данную точку A, не принадлежащую данной прямой, проведите прямую, образующую с данной прямой данный угол.

744. Решите кроссворд.



По горизонтали: 4. Прямые, которые не пересекаются. **5.** Древнегреческий математик. **6.** Сторона прямоугольного треугольника, противолежащая прямому углу. **8.** Два угла, стороны одного из которых являются дополнительными лучами сторон другого. **10.** Хорда, проходящая через центр окружности. **11.** Отрезок, соединяющий точку окружности с её центром. **12.** Геометрическое место точек, равноудалённых от данной точки. **13.** Сторона прямоугольного треугольника, прилежащая к прямому углу. **14.** Угол, смежный с углом треугольника. **15.** Одна из частей, на которые произвольная точка разбивает прямую. **18.** Утверждение, правильность которого принимают без доказательства. **22.** Прямые, при пересечении которых образуются прямые углы. **23.** Утверждение, правильность которого устанавливают с помощью доказательства. **24.** Отрезок, соединяющий две точки окружности. **25.** Угол, градусная мера которого больше 90°, но меньше 180°. **27.** Перпендикуляр, проведённый из вершины треугольника к прямой, содержащей его противолежащую сторону. **28.** Точка, равноудалённая от всех точек окружности. **29.** Автор книги «Начала».

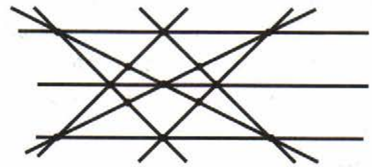
По вертикали: **1.** Луч с началом в вершине угла, который делит угол на два равных угла. **2.** Геометрическая фигура. **3.** Отрезок, соединяющий вершину треугольника с серединой противолежащей стороны. **7.** Два угла, одна сторона которых общая, а две другие – дополнительные лучи. **9.** Прямая, имеющая с окружностью одну общую точку. **12.** Окружность, проходящая через все вершины треугольника. **16.** Геометрическое место точек, расстояние от которых до данной точки не больше данного числа. **17.** Угол, градусная мера которого равна 90°. **19.** Угол, градусная мера которого меньше 90°. **20.** Единица измерения углов. **21.** Сумма длин всех сторон треугольника. **26.** Геометрическая фигура.

Ответы и указания к упражнениям

14. Одна точка, или четыре точки, или шесть точек. **15.** Наименьшее возможное количество точек пересечения – 1, наибольшее – 10. **16.** Рис. 346. **17.** 12 точек. **18.** Рис. 347. **39.** 8 см или 56 см. **41.** 1) Все точки отрезка EF; 2) точки A и B (рис. 348); 3) таких точек не существует. **42.** Таких точек две. Одна из них является такой внутренней точкой C отрезка AB, что $AC : BC = 1 : 2$, а вторая – такова, что точка A – середина отрезка BC. **43.** 4 см. **44.** *а*) Четыре точки; *б*) три точки; *в*) четыре точки; *г*) три точки. **46.** *Указание.* Воспользуйтесь равенством: 1) $13 - 2 \cdot 5 = 3$; 2) $3 \cdot 5 - 13 = 2$; 3) $2 \cdot 13 - 5 \cdot 5 = 1$. **47.** *Указание.* Воспользуйтесь равенством: 1) $2 \cdot 11 - 2 \cdot 7 =$

Рис. 346

Рис. 347



$= 8$; 2) $3 \cdot 11 - 4 \cdot 7 = 5$. **69.** 60°. **70.** 108°. **73.** 68°. **74.** 153°. **75.** 1) 6°; 2) 0,5°. **77.** 50° или 110°. **78.** 77° или 163°. **82.** *Указание.* Отложите от произвольного луча данный угол последовательно 14 раз. Воспользуйтесь тем, что полученный таким образом угол на 2° больше развёрнутого угла. **83.** 1) *Указание.* Воспользуйтесь тем, что $19° \cdot 19 = 361°$. **84.** Да. *Указание.* Предположите, что такого угла не существует, и получите противоречие. **105.** 90°. **106.** 180°. **107.** 75°. **108.** 72°, 108°. **109.** 44°, 136°. **123.** 1) 124°; 2) 98°. **124.** 126°. **128.** 70°, 160°. **129.** 1) *Указание.* $90° = 17° \cdot 5 + 5°$. **149.** 48 см. **150.** 13 см. **152.** 120°. **188.** 3 см. **189.** 10 см. **191.** 2) *Указание.* Докажите, что $\angle AOM = \angle BOK$. Угол AOB – развёрнутый. Тогда $\angle AOM + \angle MOB = 180°$. Отсюда $\angle MOB + \angle BOK = 180°$. **194.** 20°; 70°. **223.** 4 см или 7 см. **224.** 4 см и 6 см или 5 см и 5 см. **228.** 26 см или 14 см. **230.** 1) $\frac{5a}{7}$; 2) $\frac{9a}{14}$. **243.** *Указание.* Воспользовавшись тем, что если биссектриса треугольника является его высотой, то треугольник – равнобедренный, докажите, что ΔMAD и ΔKBD – равнобедренные. **244.** 8 см.

Рис. 348

Рис. 349

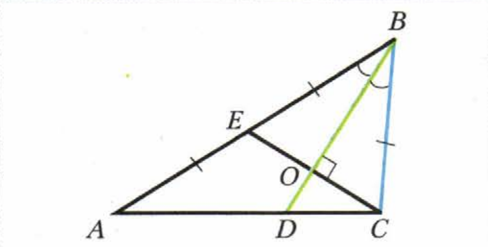
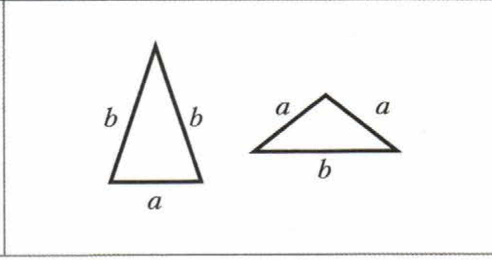


Рис. 350



245. $AB : AC = 1 : 2$. **247.** 2 см, 3 см, 4 см. *Указание*. Отрезок BD – биссектриса треугольника ABC (рис. 349), отрезок CE – его медиана, $BD \perp CE$. Докажите, что ΔCBE – равнобедренный ($BC = BE$). Тогда $AB = 2BC$ и могут иметь место такие случаи: $AB - BC = 1$ см или $AB - BC = 2$ см, т. е. $BC = 1$ см или $BC = 2$ см. **248.** 2 см. *Указание*. Докажите, что треугольники KMC и KDA – равнобедренные. **264.** Не обязательно. *Указание*. Рассмотрите треугольники, изображённые на рисунке 350. **265.** *Указание*. Пусть ABC и $A_1B_1C_1$ – данные треугольники, $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$, отрезки AM и A_1M_1 – медианы треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ соответственно. На продолжениях отрезков AM и A_1M_1 за точки M и M_1 отложите соответственно отрезки MD и M_1D_1 такие, что $MD = AM$ и $M_1D_1 = A_1M_1$. Докажите, что $AC = BD$ и $A_1C_1 = B_1D_1$. Далее докажите равенство треугольников ABD и $A_1B_1D_1$, MBD и $M_1B_1D_1$ и, наконец, ABC и $A_1B_1C_1$. **281.** *Указание*. Пусть ABC и $A_1B_1C_1$ – данные треугольники, отрезки AM и A_1M_1 – соответственно их медианы, $AM = A_1M_1$, $\angle BAM = \angle B_1A_1M_1$, $\angle CAM = \angle C_1A_1M_1$. На продолжениях отрезков AM и A_1M_1 за точки M и M_1 отложите соответственно отрезки MD и M_1D_1 такие, что $MD = AM$ и $M_1D_1 = A_1M_1$. Докажите, что $AC = BD$ и $A_1C_1 = B_1D_1$. Далее докажите равенство треугольников ABD и $A_1B_1D_1$, откуда легко получить равенство треугольников ABC и $A_1B_1C_1$. **293.** Бесконечно много. **295.** *Указание*. Предположим, что прямые a и b пересекаются. Выберем произвольную точку, принадлежащую a, отличную от точки пересечения a и b. Через выбранную точку можно провести прямую, пересекающую прямую a и параллельную прямой b, что противоречит условию. **296.** 6 см. **297.** 35°. **298.** 90°. **317.** Нет. **320.** *Указание*. Пусть прямая OK пересекает прямую AB в точке N. Докажите, что ΔNBK – равнобедренный. Далее покажите, что $\angle BKO = \angle OKM$. **321.** *Указание*. Докажите, что $BF \parallel AC$ и $BD \parallel AC$, и воспользуйтесь аксиомой параллельности прямых. **322.** 111° или 69°. **340.** 40°. **343.** 40°, 70°, 70°. **344.** 106°. **348.** *Указание*. Проведите через точку C прямую, параллельную AB. **351.** *Указание*. Докажите, что треугольники AMO и CKO – равнобедренные. **353.** $AD : DB = 2 : 3$. **396.** 25°, 55°, 100°. **399.** 35°, 35°, 110°. **400.** 140°.

403. *Указание*. Найдите углы треугольника ABC и докажите, что треугольники AMB и MAC – равнобедренные. **404.** 36°, 72°, 72°. **405.** *Указание*. Примените метод доказательства от противного. **407.** Остроугольный. *Указание*. Рассмотрите по очереди каждый угол треугольника. Так как сумма двух других углов больше 90°, то рассматриваемый угол меньше 90°. Так как все углы окажутся меньше 90°, то треугольник – остроугольный. **408.** *Указание*. В треугольнике DAC угол DAC – тупой. Значит, $DC > AC$. **410.** Нет. **412.** 36°, 72°, 72° или 90°, 45°, 45°. **414.** *Указание*. Отметьте на прямой m произвольную точку X и сравните сумму $AX + BX$ с длиной отрезка AB. **415.** 3 см. **416.** $90° - \frac{\alpha}{2}$. **417.** *Указание*. На продолжении медианы AM за точку M отложите отрезок MD, равный этой медиане, и рассмотрите ΔABD. **418.** $\left(\frac{540}{7}\right)^{\circ}$, $\left(\frac{540}{7}\right)^{\circ}$, $\left(\frac{180}{7}\right)^{\circ}$. **419.** 90°, 40°, 50°. *Указание*. Рассмотрите треугольник DAK, где точка K – середина AB. **421.** 36 см. **449.** *Указание*. Докажите равенство треугольников AKH и CMH. **450.** *Указание*. Докажите, что $\Delta MEN = \Delta NFM$. Отсюда следует, что $MK = NK$. Кроме того, $KE = FM = NE$. Значит, $MK = MN$. **451.** Нет. **453.** 50°, 130°. **465.** 30°, 1 см. **466.** 9 см. **467.** 15 см. **470.** 8 см. **471.** 6 см. *Указание*. Докажите, что треугольник ADB – равнобедренный. **473.** 21 см. **491.** 1,5 см. **492.** 60 см. **493.** Окружность данного радиуса с центром в данной точке. **494.** Серединный перпендикуляр отрезка, соединяющего данные точки. **495.** Две прямые, состоящие из биссектрис четырёх углов, образованных при пересечении данных прямых. **496.** Все точки серединного перпендикуляра данного основания, кроме точки пересечения этого перпендикуляра с основанием. **497.** Прямая, являющаяся серединным перпендикуляром отрезка, который перпендикулярен данным прямым и концы которого принадлежат данным прямым. **498.** Пара параллельных прямых, каждая из которых удалена от данной прямой на данное расстояние. **499.** *Указание*. Соедините точку M и центр O окружности и рассмотрите треугольники AOM и BOM. **500.** Все точки полуплоскости, содержащей точку B, границей которой является серединный перпендикуляр отрезка AB, за исключением границы этой полуплоскости. **501.** Все точки плоскости, не принадлежащие кругу с центром A и радиусом AB. **503.** 55°, 85°, 40°. **505.** 20°. **521.** 1) 90°; 2) 120°. **522.** 12 см. **523.** 40°. **524.** 120°. **529.** Все точки прямой, проходящей через данную точку перпендикулярно данной прямой, кроме данной точки. **530.** Все точки биссектрисы угла, за исключением вершины угла. **531.** Все точки плоскости, за исключением данной прямой. **532.** *Указание*. Рассмотрев треугольник OAK, докажите, что $OK = 2AK$. **533.** *Указание*. Воспользуйтесь свойством касательных, проведённых к окружности через одну точку. **537.** 18°. **557.** 24 см, 24 см, 20 см. **558.** 20 см, 14 см, 18 см. **559.** 50°, 55°, 75°. **562.** *Ука-*

зание. Воспользуйтесь свойством касательных, проведённых к окружности через одну точку. **563.** *a*. **564.** 16 см. *Указание*. Докажите, что сумма периметров образовавшихся треугольников равна периметру данного треугольника. **565.** 0,5 см. *Указание*. Пусть M_1 и M_2 – точки касания окружностей, вписанных соответственно в треугольники ABD и DBC. Для отрезков DM_1 и DM_2 воспользуйтесь результатом задачи 562. **566.** *Указание*. Воспользуйтесь тем, что биссектрисы треугольника, в частности треугольника AMC, пересекаются в одной точке. **567.** *Указание*. Отметьте на разных сторонах угла точки M и N. Проведите биссектрисы углов BMN и BNM. Далее отметьте на разных сторонах угла точки E и F. Проведите биссектрисы углов BEF и BFE. **568.** 36°, 36°, 108°. *Указание*. Воспользуйтесь тем, что треугольники FAO и BOA – равнобедренные. **570.** 52°, 52°, 76°. **571.** 3 см, 7 см. **595.** *Указание*. Проведите через данную точку, лежащую на стороне угла, перпендикуляр к другой стороне угла. **597.** 1) *Указание*. Постройте прямоугольный треугольник, в котором гипотенуза равна данной биссектрисе, а острый угол равен половине данного угла. **599.** *Указание*. Постройте прямоугольный треугольник, в котором один из катетов равен половине данного основания, а другой – радиусу окружности. **602.** *Указание*. Постройте прямоугольный треугольник по катету, равному данной высоте, и противолежащему острому углу, равному данному. **604.** *Указание*. Постройте прямоугольный треугольник, в котором гипотенуза равна данной стороне, а катет – данной высоте. **611.** *Указание*. Постройте прямоугольный треугольник, один из катетов которого равен разности катета и радиуса, а другой – радиусу. Тогда один из острых углов этого треугольника равен половине острого угла искомого треугольника. **615.** *Указание*. Постройте окружность, проходящую через три заданные точки. **616.** Постройте угол, равный 60°. Далее воспользуйтесь равенством 6° = 60° – 54°. **618.** 1) 15°, 95°, 70°; 2) 46°, 59°, 75°. **619.** 25°, 65°. **620.** 1) Остроугольный; 2) тупоугольный. **631.** *Указание*. Искомая точка принадлежит ГМТ, удалённых на расстояние AB от прямой n. Это ГМТ – пара прямых, параллельных прямой n. Каждая из точек пересечения этих прямых с прямой m удовлетворяет условию. Задача имеет два решения. **638.** *Указание*. Проведите отрезок, перпендикулярный двум данным параллельным прямым, концы A и B которого принадлежат этим прямым. Тогда центр искомой окружности принадлежит двум ГМТ: первому – равноудалённых от точек A и B и второму – удалённых от данной в условии точки на расстояние $\frac{1}{2}AB$. **639.** *Указание*. Геометрическим местом центров окружностей, касающихся данной прямой в данной точке B, является прямая, перпендикулярная данной и проходящая через эту точку (данная точка B не принадлежит ГМТ). Геометрическим местом центров окружностей, проходящих через точки A и B, является серединный перпендикуляр отрезка AB. **645.** *Указание*. Постройте прямоугольный треугольник BCD, в котором катет BC равен данному катету, а катет DC – сумме гипотенузы и другого катета. Тогда вершина A искомого треугольника ABC принадлежит серединному перпендикуляру отрезка BD. **646.** *Указание*. Постройте треугольник ADB, в котором $\angle D = 45°$, сторона DB равна сумме данных катетов, сторона AB – данной гипотенузе. **647.** *Указание*. Постройте треугольник ADB, в котором $\angle D = 135°$, сторона DB равна разности данных катетов, сторона AB – данной гипотенузе. **648.** *Указание*. Постройте треугольник DBC, в котором $\angle C = 90°$, катет CB равен данному катету, катет CD – разности гипотенузы и другого катета. Тогда искомая вершина A лежит на серединном перпендикуляре отрезка DB. **650.** *Указание*. Постройте $\Delta\, ADC$, в котором сторона AC равна данной, сторона DC – сумме двух других сторон, угол DCA – данному углу. **651.** *Указание*. Постройте треугольник ADC по данной стороне AC, данному углу C и стороне DC, равной данной разности сторон. Вершина B искомого треугольника ABC лежит на серединном перпендикуляре отрезка AD. Описанное построение применимо к случаю, когда заданный угол C прилежит к большей из двух неизвестных сторон. **652.** *Указание*. Постройте треугольник ADC, в котором $\angle D = 90° + \frac{\beta}{2}$, где β – данный угол, сторона AC равна данной стороне, сторона AD – данной разности сторон. Тогда искомая вершина B лежит на серединном перпендикуляре отрезка DC. **653.** *Указание*. Постройте треугольник ADC, в котором $\angle D = \frac{\beta}{2}$, где β – данный угол, сторона AC равна данной стороне, сторона AD – данной сумме сторон. Тогда искомая вершина B лежит на серединном перпендикуляре отрезка DC. **654.** *Указание*. Постройте треугольник ADC, в котором AC – данная сторона, отрезок DC равен сумме неизвестных сторон, $\angle DAC = 90° + \alpha$, где α – полуразность углов, о которых говорится в условии. **656.** *Указание*. Постройте прямоугольный треугольник по катету, равному высоте, и противолежащему углу, равному данному. Гипотенуза этого треугольника – одна из сторон искомого. Теперь задача свелась к задаче 650. **657.** *Указание*. Постройте прямоугольный треугольник BDM, в котором гипотенуза BM равна данной медиане, катет BD – данной высоте. Тогда центр описанной окружности искомого треугольника лежит на прямой, перпендикулярной отрезку DM, проходящей через точку M. **658.** *Указание*. Постройте треугольник ABD, в котором стороны AB и AD равны двум данным сторонам, а сторона BD в 2 раза больше данной медианы. **659.** *Указание*. Постройте треугольник ADC, в котором AC – данная сторона, сторона AD в 2 раза больше данной медианы, а высота, проведённая из вершины D, равна данной высоте. Покажите, что сторона DC равна одной из неизвестных сторон искомого треугольника. **661.** 65°. **662.** 15°, 75°. **663.** 180°. **665.** $\frac{4a}{5}$. **666.** Точки X_1 и X_2, изображённые на рисунке 351. **667.** Точки Y_1 и Y_2, изображённые на рисунке 352. **670.** 60° или 180°. Два решения. **671.** 40° или 140°. Два решения. **673.** 20°. **675.** 42 см. **689.** 15 см. **700.** 45°, 45°, 90°. **702.** 30°, 40°, 110°. **703.** 35°. **704.** 10°. **705.** 52°, 52°, 76°. **706.** 70°, 70°, 40°. **711.** 33°, 57°. **712.** 45°. **716.** 50°, 50°, 80° или 80°, 80°, 20°. **718.** 70°, 70°, 40° или 50°, 50°, 80°. **719.** 135°. **722.** 22 см. **723.** 9 см. **724.** 60°. **728.** 120°. **732.** 60°. **736.** 6 см. **738.** *Указание*. Пусть O – центр окружности. Докажите, что $\angle COD = 180°$. **739.** 114°. **741.** *Указание*. Докажите, что точки O_1 и O_2 принадлежат биссектрисе угла B.

Рис. 351

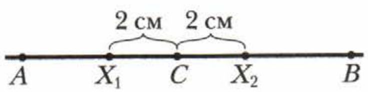
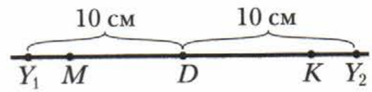


Рис. 352



Ответы к заданиям «Проверьте себя» в тестовой форме

Номер задания	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	В	Г	А	В	В	В	Б	Б	В	Б	В
2	Б	Б	Г	Г	Б	В	Б	Б	А	В	Б
3	Г	В	В	А	А	Б	В	В	Б	В	Б
4	В	Г	А	В	Б	А	В	В	Г	Б	Г

Алфавитно-предметный указатель

Происхождение математических терминов

Аксиома	От греческого *axios* — «достойный признания»
Биссектриса	От латинского *bis* — «дважды» и *sectrix* — «секущая»
Геометрия	От греческого *ge* — «земля» и *metreo* — «измеряю»
Гипотенуза	От греческого *gipotenusa* — «стягивающая»
Градус	От латинского *gradus* — «шаг, ступень»
Диагональ	От греческого *dia* — «через» и *gonium* — «угол»
Диаметр	От греческого *diametros* — «поперечник»
Катет	От греческого *katetos* — «отвес»
Квадрат	От латинского *quadratus* — «четырёхугольный» (*guattuor* — «четыре»)
Куб	От греческого *kybos* — «игральная кость»
Математика	От греческого *mathematike* (*mathema* — «знание, наука»)
Медиана	От латинского *medius* — «средний»

Окончание

Метр	От французского *metre* — «палка для измерения» или греческого *metron* — «мера»
Параллельность	От греческого *parallelos* — «идущий рядом»
Периметр	От греческого *peri* — «вокруг» и *metreo* — «измеряю»
Перпендикуляр	От латинского *perpendicularis* — «отвесный»
Планиметрия	От греческого *planum* — «плоскость»
Пропорция	От латинского *proportio* — «соотношение»
Радиус	От латинского *radius* — «спица в колесе, луч»
Теорема	От греческого *theoreo* — «рассматриваю, обдумываю»
Транспортир	От латинского *transportaro* — «переносить, перекладывать»
Фигура	От латинского *figura* — «внешний вид, образ»
Формула	От латинского *formula* — «форма, правило»
Хорда	От греческого *chorde* — «струна, тетива»
Центр	От латинского *centrum* — «остриё ножки циркуля»
Циркуль	От латинского *circulus* — «окружность»

Учителю

Мы считаем, что в рамках общеобразовательной школы невозможно реализовать формально-логический принцип построения курса геометрии: положить в основу систему аксиом, а дальше строить изложение дедуктивно, т. е. доказывать теоремы логически строго, основываясь на аксиомах и ранее доказанных фактах. Это, скорее всего, можно объяснить тем, что число учеников (особенно семиклассников), склонных к дедуктивному мышлению, невелико. На самом деле большинству присущ наглядно-образный тип мышления. Поэтому для ребёнка апелляция к наглядной очевидности совершенно естественна и оправданна.

Исходя из сказанного, в основу данного учебника положен **наглядно-дедуктивный принцип в сочетании с частичной аксиоматизацией**.

Мы считаем, что цель изучения геометрии в школе – это не только развитие логического мышления и умения проводить доказательство. Авторы учебника ставят более широкую задачу: уточнить представление учащихся об элементарных геометрических объектах (точка, прямая, луч, отрезок, угол), ознакомить их с важнейшими свойствами базовых фигур элементарной геометрии (треугольник, окружность, четырёхугольник и т. п.), развить у них потребность в доказательстве, т. е. заложить основы дедуктивного и эвристического мышления, а главное – **научить учащихся применять свойства геометрических фигур при решении практических и теоретических задач**.

В учебнике собран обширный и разнообразный дидактический материал. Однако за один учебный год все задачи решить невозможно, да в этом и нет никакой необходимости. Вместе с тем гораздо удобнее работать, когда есть большой запас задач. Это позволит реализовать принципы уровневой дифференциации и индивидуального подхода в обучении.

Давайте превратим школьный курс геометрии в ясный и привлекательный предмет. Желаем творческого вдохновения и терпения.

Оглавление