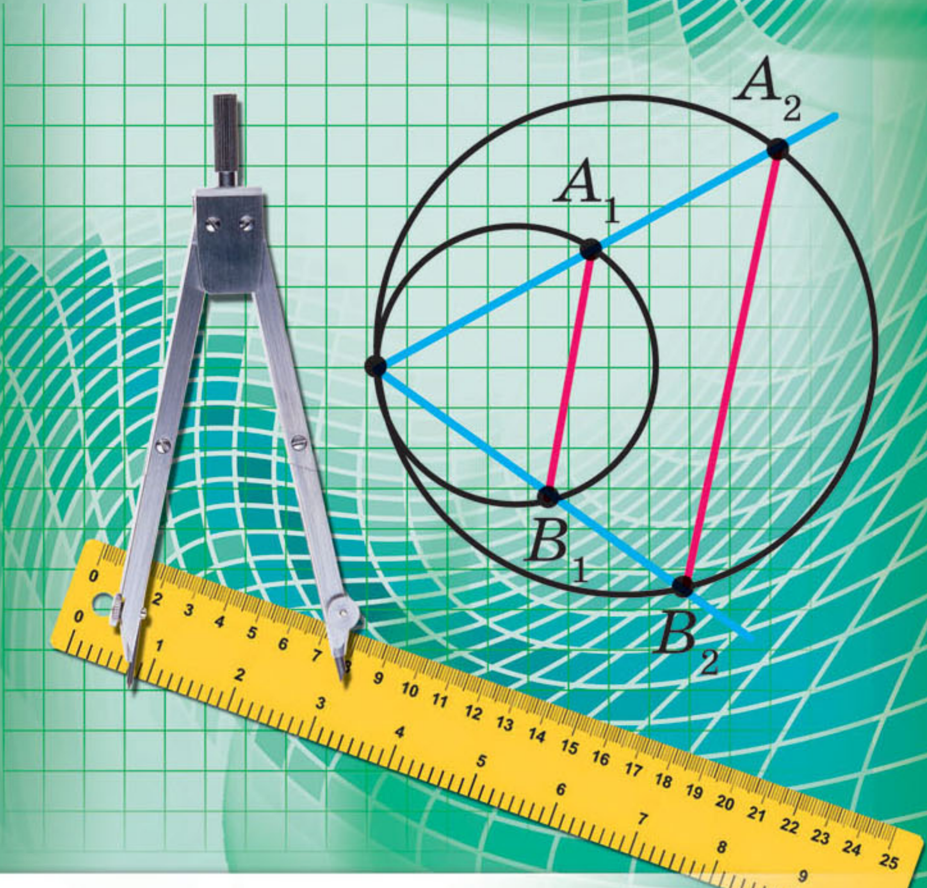
А. Г. Мерзляк
В. Б. Полонський
М. С. Якір

9

ГЕОМЕТРІЯ



ГІМНАЗІЯ

УДК 373.167.1:512
М52

Рекомендовано
Міністерством освіти і науки України
(наказ МОН України від 20.03.2017 № 417)

Видано за рахунок державних коштів.
Продаж заборонено

Експерти, які здійснили експертизу даного підручника під час проведення конкурсного відбору проектів підручників для 9 класу загальноосвітніх навчальних закладів і зробили висновок про доцільність надання підручнику грифа «Рекомендовано Міністерством освіти і науки України»:

Л. І. Філозоф, доцент кафедри алгебри і математичного аналізу Східноєвропейського національного університету імені Лесі Українки, кандидат фізико-математичних наук;

О. В. Тесленко, методист методичного центру Управління освіти адміністрації Слобідського району Харківської міської ради;

Т. А. Євтушевська, учитель Черкаської загальноосвітньої школи I–III ступенів № 7, учитель-методист

Експертка з антидискримінації в освіті

Н. М. Дашенкова, доцентка кафедри філософії, співробітниця ЦГО ХНУРЕ

Мерзляк А. Г.
М52 Геометрія : підруч. для 9 кл. загальноосвіт. навч. закладів / А. Г. Мерзляк, В. Б. Полонський, М. С. Якір. — Х. : Гімназія, 2017. — 240 с. : іл.
ISBN 978-966-474-295-2.

УДК 373.167.1:512

ISBN 978-966-474-295-2

ВІД АВТОРІВ

Любі діти!

У цьому навчальному році ви продовжите вивчати геометрію. Сподіваємося, що ви встигли полюбити цю важливу й красиву науку, а отже, з інтересом будете опановувати нові знання. Ми маємо надію, що цьому сприятиме підручник, який ви тримаєте в руках.

Ознайомтеся, будь ласка, з його структурою.

Підручник поділено на п'ять параграфів, кожний з яких складається з пунктів. У пунктах викладено теоретичний матеріал. Вивчаючи його, особливу увагу звертайте на текст, який надруковано **жирним шрифтом**, ***жирним курсивом*** і *курсивом*; так у книзі виділено означення, правила та найважливіші математичні твердження.

Зазвичай виклад теоретичного матеріалу завершується прикладами розв'язування задач. Ці записи можна розглядати як один із можливих зразків оформлення розв'язання.

До кожного пункту дібрано задачі для самостійного розв'язування, приступати до яких радимо лише після засвоєння теоретичного матеріалу. Серед завдань є як прості й середні за складністю вправи, так і складні задачі, особливо ті, що позначено зірочкою (*). Свої знання можна перевірити, розв'язуючи задачі в тестовій формі, розміщені в кінці кожного параграфа.

Кожний пункт з непарним номером завершується рубрикою «Спостерігайте, рисуйте, конструюйте, фантазуйте». До неї дібрано задачі, для розв'язування яких потрібні не спеціальні геометричні знання, а лише здоровий глузд, винахідливість і кмітливість. Ці задачі корисні, як вітаміни. Вони допоможуть вам навчитися приймати несподівані й нестандартні рішення не тільки в математиці, а й у житті.

Якщо після виконання домашніх завдань залишається вільний час і ви хочете дізнатися більше, то рекомендуємо звернутися до рубрики «Коли зроблено уроки». Матеріал, викладений там, непростий. Але тим цікавіше випробувати свої сили!

Дерзайте! Бажаємо успіху!

Шановні колеги та колежанки!

Ми дуже сподіваємося, що цей підручник стане надійним помічником у вашій нелегкій та шляхетній праці, і будемо щиро раді, якщо він вам сподобається.

У книзі дібрано великий і різноманітний дидактичний матеріал. Проте за один навчальний рік усі задачі розв'язати неможливо, та в цьому й немає потреби. Разом з тим набагато зручніше працювати, коли є значний запас задач. Це дає можливість реалізувати принципи рівневої диференціації та індивідуального підходу в навчанні.

У навчальній програмі з математики для учнів 5–9 класів загальноосвітніх навчальних закладів зазначено таке: «Зміст навчального матеріалу структуровано за темами відповідних навчальних курсів із визначенням кількості годин на їх вивчення. Такий розподіл змісту і навчального часу є орієнтовним. Учителеві та авторам підручників надається право коригувати його залежно від прийнятої методичної концепції...».

Зважаючи на наведене, ми визнали за доцільне переставити навчальний матеріал деяких тем відповідно до авторської концепції. Це дає змогу істотно урізноманітнити дидактичний матеріал підручника.

Зеленим кольором позначено номери задач, що рекомендуються для домашньої роботи, **синім** кольором — номери задач, які на розсуд учителя (з урахуванням індивідуальних особливостей учнів класу) можна розв'язувати усно.

Матеріал рубрики «Коли зроблено уроки» може бути використаний для організації роботи математичного гуртка та факультативних занять.

Бажаємо творчого натхнення й терпіння.

УМОВНІ ПОЗНАЧЕННЯ

n° завдання, що відповідають початковому та середньому рівням навчальних досягнень;

$n^{\bullet}$ завдання, що відповідають достатньому рівню навчальних досягнень;

$n^{\bullet\bullet}$ завдання, що відповідають високому рівню навчальних досягнень;

n^{*} задачі для математичних гуртків і факультативів;

ключові задачі, результат яких може бути використаний під час розв'язування інших задач;

$\odot$ доведення теореми, що відповідає достатньому рівню навчальних досягнень;

доведення теореми, що відповідає високому рівню навчальних досягнень;

доведення теореми, не обов'язкове для вивчення;

◄ закінчення доведення теореми, розв'язання задачі;

рубрика «Коли зроблено уроки».

РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ТРИКУТНИКІВ §1

У цьому параграфі ви дізнаєтеся, що являють собою синус, косинус і тангенс кута α, де $0° \leqslant \alpha \leqslant 180°$.

Ви навчитеся за двома сторонами трикутника і кутом між ними знаходити третю сторону, а також за стороною і двома прилеглими до неї кутами знаходити дві інші сторони трикутника.

У 8 класі ви навчилися розв'язувати прямокутні трикутники. Вивчивши матеріал цього параграфа, ви зможете розв'язувати будь-які трикутники.

Ви дізнаєтеся про нові формули, за допомогою яких можна знаходити площу трикутника.

1. Синус, косинус і тангенс кута від 0° до 180°

Поняття синуса, косинуса й тангенса гострого кута вам відомі з курсу геометрії 8 класу. Розширимо ці поняття для довільного кута α, де $0° \leqslant \alpha \leqslant 180°$.

У верхній півплощині координатної площини розглянемо півколо із центром у початку координат, радіус якого дорівнює 1 (рис. 1.1). Таке півколо називають **одиничним**.

Будемо говорити, що **куту** α $(0° \leqslant \alpha \leqslant 180°)$ **відповідає точка** M одиничного півкола, якщо $\angle MOA = \alpha$, де точки O і A мають відповідно координати (0; 0) і (1; 0) (рис. 1.1). Наприклад, на рисунку 1.1 куту, який дорівнює 90°, відповідає точка C; куту, який дорівнює 180°, — точка B; куту, який дорівнює 0°, — точка A.

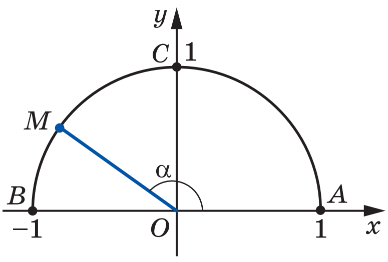


Рис. 1.1

Нехай α — гострий кут. Йому відповідає деяка точка M $(x;\ y)$ дуги AC одиничного півкола (рис. 1.2). У прямокутному трикутнику OMN маємо:

$$\cos\alpha = \frac{ON}{OM}, \quad \sin\alpha = \frac{MN}{OM}.$$

Оскільки $OM = 1$, $ON = x$, $MN = y$, то

$$\cos\alpha = x, \ \sin\alpha = y.$$

Отже, косинус і синус гострого кута α — це відповідно абсциса й ордината точки M одиничного півкола, яка відповідає куту α.

Отриманий результат підказує, як означити синус і косинус довільного кута α, де $0° \leqslant \alpha \leqslant 180°$.

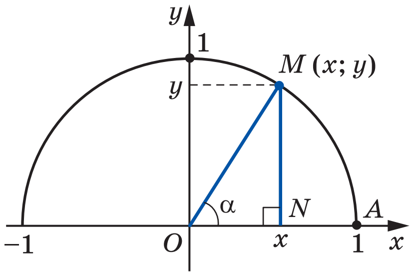


Рис. 1.2

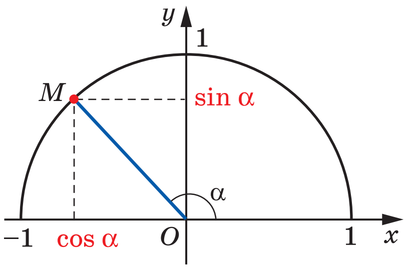


Рис. 1.3

Означення. Косинусом і синусом кута α $(0° \leqslant \alpha \leqslant 180°)$ називають відповідно абсцису й ординату точки M одиничного півкола, яка відповідає куту α (рис. 1.3).

Користуючись цим означенням, можна, наприклад, установити, що $\sin 0° = 0$, $\cos 0° = 1$, $\sin 90° = 1$, $\cos 90° = 0$, $\sin 180° = 0$, $\cos 180° = -1$.

Якщо M $(x;\ y)$ — довільна точка одиничного півкола, то $-1 \leqslant x \leqslant 1$ і $0 \leqslant y \leqslant 1$. Отже, для будь-якого кута α, де $0° \leqslant \alpha \leqslant 180°$, маємо:

$$0 \leqslant \sin\alpha \leqslant 1,$$

$$-1 \leqslant \cos\alpha \leqslant 1.$$

Якщо α — тупий кут, то абсциса точки, що відповідає цьому куту, є від'ємною. Отже, косинус тупого кута є від'ємним числом. Справедливе й таке твердження: якщо $\cos\alpha < 0$, то α — тупий або розгорнутий кут.

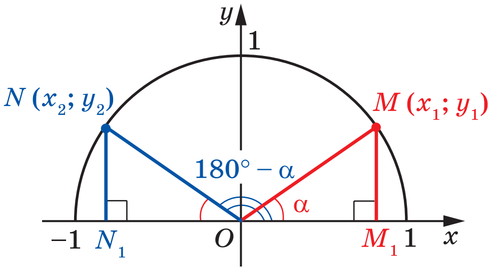


Рис. 1.4

Із курсу геометрії 8 класу ви знаєте, що для будь-якого гострого кута α виконуються рівності:

$$\mathbf{sin}\,(90° - \alpha) = \mathbf{cos}\,\alpha,$$
$$\mathbf{cos}\,(90° - \alpha) = \mathbf{sin}\,\alpha$$

Ці формули залишаються справедливими також для $\alpha = 0°$ і для $\alpha = 90°$ (переконайтеся в цьому самостійно).

Нехай кутам α і $180° - \alpha$, де $\alpha \neq 0°$, $\alpha \neq 90°$ і $\alpha \neq 180°$, відповідають точки $M\,(x_1;\,y_1)$ і $N\,(x_2;\,y_2)$ одиничного півкола (рис. 1.4).

Прямокутні трикутники OMM_1 і ONN_1 рівні за гіпотенузою та гострим кутом ($OM = ON = 1$, $\angle MOM_1 = \angle NON_1 = \alpha$). Звідси $y_2 = y_1$ і $x_2 = -x_1$. Отже,

$$\mathbf{sin}\,(180° - \alpha) = \mathbf{sin}\,\alpha,$$
$$\mathbf{cos}\,(180° - \alpha) = -\mathbf{cos}\,\alpha$$

Переконайтеся самостійно, що ці рівності залишаються правильними для $\alpha = 0°$, $\alpha = 90°$, $\alpha = 180°$.

Якщо α — гострий кут, то, як ви знаєте з курсу геометрії 8 класу, є справедливою тотожність, яку називають **основною тригонометричною тотожністю**:

$$\mathbf{sin}^2\,\alpha + \mathbf{cos}^2\,\alpha = \mathbf{1}$$

Ця рівність залишається правильною для $\alpha = 0°$, $\alpha = 90°$, $\alpha = 180°$ (переконайтеся в цьому самостійно).

Нехай α — тупий кут. Тоді кут $180° - \alpha$ є гострим. Маємо:

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = (\sin\,(180° - \alpha))^2 + (-\cos\,(180° - \alpha))^2 =$$
$$= \sin^2\,(180° - \alpha) + \cos^2\,(180° - \alpha) = 1.$$

Отже, рівність $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ виконується для всіх $0° \leqslant \alpha \leqslant 180°$.

Означення. Тангенсом кута α, де $0° \leqslant \alpha \leqslant 180°$ і $\alpha \neq 90°$, називають відношення $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$, тобто

$$\boxed{\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}$$

Оскільки $\cos 90° = 0$, то $\operatorname{tg}\alpha$ не визначений для $\alpha = 90°$.

Очевидно, що кожному куту α $(0° \leqslant \alpha \leqslant 180°)$ відповідає *єдина* точка одиничного півкола. Отже, кожному куту α відповідає єдине число, яке є значенням синуса (косинуса, тангенса для $\alpha \neq 90°$). Тому залежність значення синуса (косинуса, тангенса) від величини кута є функціональною.

Функції $f(\alpha) = \sin\alpha$, $g(\alpha) = \cos\alpha$, $h(\alpha) = \operatorname{tg}\alpha$, які відповідають цим функціональним залежностям, називають **тригонометричними функціями** кута α.

Задача 1. Доведіть, що $\operatorname{tg}(180° - \alpha) = -\operatorname{tg}\alpha$.

Розв'язання

$$\operatorname{tg}(180° - \alpha) = \frac{\sin(180° - \alpha)}{\cos(180° - \alpha)} = \frac{\sin\alpha}{-\cos\alpha} = -\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = -\operatorname{tg}\alpha. \blacktriangleleft$$

Задача 2. Знайдіть $\sin 120°$, $\cos 120°$, $\operatorname{tg} 120°$.

Розв'язання. Маємо: $\sin 120° = \sin(180° - 60°) = \sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$;

$$\cos 120° = \cos(180° - 60°) = -\cos 60° = -\frac{1}{2};$$

$$\operatorname{tg} 120° = \operatorname{tg}(180° - 60°) = -\operatorname{tg} 60° = -\sqrt{3}. \blacktriangleleft$$

?

1. Яке півколо називають одиничним?
2. Поясніть, у якому разі говорять, що куту α відповідає точка M одиничного півкола.
3. Що називають синусом кута α, де $0° \leqslant \alpha \leqslant 180°$?
4. Що називають косинусом кута α, де $0° \leqslant \alpha \leqslant 180°$?
5. Чому дорівнює $\sin 0°$, $\cos 0°$, $\sin 90°$, $\cos 90°$, $\sin 180°$, $\cos 180°$?
6. У яких межах знаходяться значення $\sin\alpha$, якщо $0° \leqslant \alpha \leqslant 180°$?
7. У яких межах знаходяться значення $\cos\alpha$, якщо $0° \leqslant \alpha \leqslant 180°$?
8. Яким числом — додатним чи від'ємним — є синус гострого кута? синус тупого кута? косинус гострого кута? косинус тупого кута?
9. Яким кутом є кут α, якщо $\cos\alpha < 0$?
10. Чому дорівнює $\sin(180° - \alpha)$? $\cos(180° - \alpha)$?

11. Як пов'язані між собою синус і косинус одного й того самого кута?
12. Що називають тангенсом кута α, де $0° \leqslant \alpha \leqslant 180°$ і $\alpha \neq 90°$?
13. Чому $\mathrm{tg}\,\alpha$ не визначений для $\alpha = 90°$?
14. Яку загальну назву мають функції $f(\alpha) = \sin\alpha$, $g(\alpha) = \cos\alpha$ і $h(\alpha) = \mathrm{tg}\,\alpha$?

ПРАКТИЧНІ ЗАВДАННЯ

1.1.° Накресліть одиничне півколо, узявши за одиничний такий відрізок, довжина якого в 5 разів більша за сторону клітинки зошита. Побудуйте кут, вершиною якого є початок координат, а однією зі сторін — додатна піввісь осі абсцис:

1) косинус якого дорівнює $\frac{1}{5}$;
2) косинус якого дорівнює $-0{,}4$;
3) синус якого дорівнює $0{,}6$;
4) синус якого дорівнює 1;
5) косинус якого дорівнює 0;
6) косинус якого дорівнює -1.

ВПРАВИ

1.2.° Чому дорівнює:

1) $\sin(180° - \alpha)$, якщо $\sin\alpha = \frac{1}{3}$;
2) $\cos(180° - \alpha)$, якщо $\cos\alpha = 0{,}7$;
3) $\cos(180° - \alpha)$, якщо $\cos\alpha = -\frac{4}{9}$;
4) $\mathrm{tg}(180° - \alpha)$, якщо $\mathrm{tg}\,\alpha = -5$?

1.3.° Кути α і β суміжні, $\cos\alpha = -\frac{1}{6}$.

1) Знайдіть $\cos\beta$.
2) Який із кутів α і β є гострим, а який — тупим?

1.4.° Знайдіть значення виразу:

1) $2\sin 90° + 3\cos 0°$;
2) $3\sin 0° - 5\cos 180°$;
3) $\mathrm{tg}\,23° \cdot \mathrm{tg}\,0° \cdot \mathrm{tg}\,106°$;
4) $6\,\mathrm{tg}\,180° + 5\sin 180°$;
5) $\cos^2 165° + \sin^2 165°$;
6) $\frac{\sin 0° + \sin 90°}{\cos 0° - \cos 90°}$.

1.5.° Обчисліть:

1) $4\cos 90° + 2\cos 180° - \mathrm{tg}\,180°$;
2) $\cos 0° - \cos 180° + \sin 90°$.

1.6.° Чому дорівнює синус кута, якщо його косинус дорівнює:
1) 1; 2) 0?

1.7.° Чому дорівнює косинус кута, якщо його синус дорівнює:
1) 1; 2) 0?

1.8.° Знайдіть sin 135°, cos 135°, tg 135°.

1.9.° Знайдіть sin 150°, cos 150°, tg 150°.

1.10.° Чи існує кут α, для якого:

1) $\sin\alpha = \frac{1}{2}$; 3) $\cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{5}$; 5) $\cos\alpha = 1{,}001$;

2) $\sin\alpha = 0{,}3$; 4) $\cos\alpha = -0{,}99$; 6) $\sin\alpha = \frac{\sqrt{5}}{2}$?

1.11.• Знайдіть:

1) cos α, якщо $\sin\alpha = \frac{3}{5}$ і $0° \leqslant \alpha \leqslant 90°$;

2) cos α, якщо $\sin\alpha = \frac{1}{3}$ і $90° \leqslant \alpha \leqslant 180°$;

3) cos α, якщо $\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{4}$;

4) sin α, якщо $\cos\alpha = -0{,}8$;

5) tg α, якщо $\sin\alpha = \frac{4}{5}$ і $90° \leqslant \alpha \leqslant 180°$.

1.12.• Знайдіть:

1) cos α, якщо $\sin\alpha = \frac{5}{13}$;

2) sin α, якщо $\cos\alpha = \frac{1}{6}$;

3) tg α, якщо $\cos\alpha = \frac{5}{13}$ і $0° \leqslant \alpha \leqslant 90°$.

1.13.• Чи є правильним твердження (відповідь обґрунтуйте):
1) косинус гострого кута більший за косинус тупого кута;
2) існує тупий кут, синус і косинус якого рівні;
3) існує кут, синус і косинус якого дорівнюють нулю;
4) косинус кута трикутника може дорівнювати від'ємному числу;
5) синус кута трикутника може дорівнювати від'ємному числу;
6) косинус кута трикутника може дорівнювати нулю;
7) синус кута трикутника може дорівнювати нулю;

8) косинус кута трикутника може дорівнювати –1;
9) синус кута трикутника може дорівнювати 1;
10) синус кута, відмінного від прямого, менший від синуса прямого кута;
11) косинус розгорнутого кута менший від косинуса кута, відмінного від розгорнутого;
12) синуси суміжних кутів рівні;
13) косинуси нерівних суміжних кутів є протилежними числами;
14) якщо косинуси двох кутів рівні, то рівні й самі кути;
15) якщо синуси двох кутів рівні, то рівні й самі кути;
16) тангенс гострого кута більший за тангенс тупого кута?

1.14.° Порівняйте з нулем значення виразу:

1) $\sin 110° \cos 140°$;
2) $\sin 80° \cos 100° \cos 148°$;
3) $\sin 128° \cos^2 130° \operatorname{tg} 92°$;
4) $\sin 70° \cos 90° \operatorname{tg} 104°$.

1.15.° Знайдіть значення виразу:

1) $2 \sin 120° + 4 \cos 150° - 2 \operatorname{tg} 135°$;
2) $2 \cos^2 120° - 8 \sin^2 150° + 3 \cos 90° \cos 162°$;
3) $\cos 180° (\sin 135° \operatorname{tg} 60° - \cos 135°)^2$.

1.16.° Чому дорівнює значення виразу:

1) $2 \sin 150° - 4 \cos 120°$;
2) $\sin 90° (\operatorname{tg} 150° \cos 135° - \operatorname{tg} 120° \cos 135°)^2$?

1.17.° Знайдіть значення виразу, не користуючись калькулятором:

1) $\dfrac{\sin 18°}{\sin 162°}$;
2) $\dfrac{\cos 18°}{\cos 162°}$;
3) $\dfrac{\operatorname{tg} 18°}{\operatorname{tg} 162°}$.

1.18.° Знайдіть значення виразу, не користуючись калькулятором:

1) $\dfrac{\sin 28°}{\sin 152°}$;
2) $\dfrac{\cos 49°}{\cos 131°}$;
3) $\dfrac{\operatorname{tg} 14°}{\operatorname{tg} 166°}$.

1.19.° Знайдіть суму квадратів синусів усіх кутів прямокутного трикутника.

1.20.° Знайдіть суму квадратів косинусів усіх кутів прямокутного трикутника.

1.21.° У трикутнику ABC відомо, що $\angle B = 60°$, точка O — центр вписаного кола. Чому дорівнює косинус кута AOC?

1.22.° Точка O — центр кола, вписаного в трикутник ABC, $\cos \angle BOC = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Знайдіть кут A трикутника.

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

1.23. Висота паралелограма, проведена з вершини тупого кута, дорівнює 5 см і ділить сторону паралелограма навпіл. Гострий кут паралелограма дорівнює 30°. Знайдіть діагональ паралелограма, проведену з вершини тупого кута, і кути, які вона утворює зі сторонами паралелограма.

1.24. Пряма CE паралельна бічній стороні AB трапеції $ABCD$ і ділить основу AD на відрізки AE і DE такі, що $AE = 7$ см, $DE = 10$ см. Знайдіть середню лінію трапеції.

ГОТУЄМОСЯ ДО ВИВЧЕННЯ НОВОЇ ТЕМИ

1.25. Дві сторони трикутника дорівнюють 8 см і 11 см. Чи може кут, протилежний стороні завдовжки 8 см, бути:
1) тупим; 2) прямим?
Відповідь обґрунтуйте.

1.26. У трикутнику ABC проведено висоту BD, $\angle A = 60°$, $\angle C = 45°$, $AB = 10$ см. Знайдіть сторону BC.

1.27. Знайдіть висоту BD трикутника ABC і проекцію сторони AB на пряму AC, якщо $\angle BAC = 150°$, $AB = 12$ см.

СПОСТЕРІГАЙТЕ, РИСУЙТЕ, КОНСТРУЮЙТЕ, ФАНТАЗУЙТЕ

1.28. Покажіть, що будь-який трикутник можна розрізати на 3 частини так, що з отриманих частин можна скласти прямокутник.

2. Теорема косинусів

Із першої ознаки рівності трикутників випливає, що дві сторони та кут між ними однозначно визначають трикутник. Отже, за вказаними елементами можна, наприклад, знайти третю сторону трикутника. Як це зробити, показує така теорема.

Теорема 2.1 (теорема косинусів). ***Квадрат сторони трикутника дорівнює сумі квадратів двох інших сторін мінус подвоєний добуток цих сторін і косинуса кута між ними.***

Доведення. Розглянемо трикутник ABC. Доведемо, наприклад, що

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos A.$$

Можливі три випадки:

1) кут A гострий;

2) кут A тупий;

3) кут A прямий.

Перший випадок. Нехай кут A гострий. Тоді хоча б один із кутів B або C є гострим.

• Нехай $\angle C < 90°$. Проведемо висоту BD. Вона повністю належатиме трикутнику ABC (рис. 2.1).

У прямокутному трикутнику ABD:

$$BD = AB \cdot \sin A, \quad AD = AB \cdot \cos A.$$

У прямокутному трикутнику BDC: $BC^2 = BD^2 + CD^2 =$

$$= BD^2 + (AC - AD)^2 = AB^2 \cdot \sin^2 A + (AC - AB \cdot \cos A)^2 =$$

$$= AB^2 \cdot \sin^2 A + AC^2 - 2AC \cdot AB \cdot \cos A + AB^2 \cdot \cos^2 A =$$

$$= AB^2 \cdot (\sin^2 A + \cos^2 A) + AC^2 - 2AC \cdot AB \cdot \cos A =$$

$$= AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos A.$$

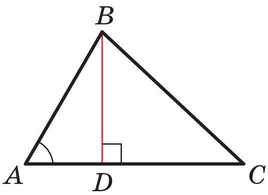


Рис. 2.1

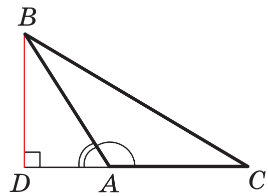


Рис. 2.2

• Нехай $\angle B < 90°$. Проведемо висоту трикутника ABC із вершини C. Вона повністю належатиме трикутнику ABC. Доведення для цього випадку аналогічне розглянутому. Проведіть його самостійно.

Другий випадок. Нехай кут A тупий. Проведемо висоту BD трикутника ABC (рис. 2.2).

У прямокутному трикутнику ABD: $BD = AB \cdot \sin \angle BAD =$

$$= AB \cdot \sin(180° - \angle BAC) = AB \cdot \sin \angle BAC,$$

$$AD = AB \cdot \cos \angle BAD = AB \cdot \cos(180° - \angle BAC) = -AB \cdot \cos \angle BAC.$$

У прямокутному трикутнику BDC: $BC^2 = BD^2 + CD^2 =$

$$= BD^2 + (AC + AD)^2 = AB^2 \cdot \sin^2 \angle BAC + (AC - AB \cdot \cos \angle BAC)^2 =$$

$$= AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos \angle BAC.$$

Третій випадок. Нехай кут A прямий (рис. 2.3). Тоді $\cos A = 0$. Треба довести, що $BC^2 = AB^2 + AC^2$. Ця рівність випливає з теореми Піфагора для трикутника ABC. ◄

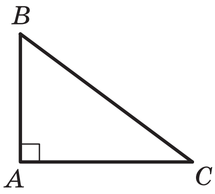


Рис. 2.3

Доведення теореми косинусів показує, що *теорема Піфагора є окремим випадком теореми косинусів, а теорема косинусів є узагальненням теореми Піфагора.*

Якщо скористатися позначеннями для довжин сторін і величин кутів трикутника ABC (див. форзац), то, наприклад, для сторони, довжина якої дорівнює a, можна записати:

$$\boxed{a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha}$$

За допомогою теореми косинусів, знаючи три сторони трикутника, можна визначити, чи є він гострокутним, тупокутним або прямокутним.

Теорема 2.2 (наслідок з теореми косинусів). ***Нехай a, b і c — довжини сторін трикутника, причому a — довжина його найбільшої сторони. Якщо $a^2 < b^2 + c^2$, то трикутник є гострокутним. Якщо $a^2 > b^2 + c^2$, то трикутник є тупокутним. Якщо $a^2 = b^2 + c^2$, то трикутник є прямокутним.***

Доведення. За теоремою косинусів

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha.$$

Звідси $2bc \cos \alpha = b^2 + c^2 - a^2$.

Нехай $a^2 < b^2 + c^2$. Тоді $b^2 + c^2 - a^2 > 0$. Звідси $2bc \cos \alpha > 0$, тобто $\cos \alpha > 0$. Тому кут α гострий.

Оскільки a — довжина найбільшої сторони трикутника, то проти цієї сторони лежить найбільший кут, який, як ми довели, є гострим. Отже, у цьому випадку трикутник є гострокутним.

Нехай $a^2 > b^2 + c^2$. Тоді $b^2 + c^2 - a^2 < 0$. Звідси $2bc \cos \alpha < 0$, тобто $\cos \alpha < 0$. Тому кут α тупий. Отже, у цьому випадку трикутник є тупокутним.

Нехай $a^2 = b^2 + c^2$. Тоді $2bc \cos \alpha = 0$. Звідси $\cos \alpha = 0$. Отже, $\alpha = 90°$. У цьому випадку трикутник є прямокутним. ◄

Задача 1. Доведіть, що сума квадратів діагоналей паралелограма дорівнює сумі квадратів усіх його сторін.

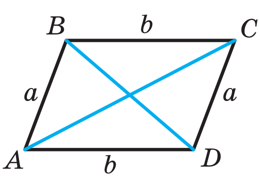


Рис. 2.4

Розв'язання. На рисунку 2.4 зображено паралелограм $ABCD$.

Нехай $AB = CD = a$, $BC = AD = b$, $\angle BAD = \alpha$, тоді $\angle ADC = 180° - \alpha$.
Із трикутника ABD за теоремою косинусів отримуємо:

$$BD^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha. \qquad (1)$$

Із трикутника ACD за теоремою косинусів отримуємо:

$$AC^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(180° - \alpha).\ \text{Звідси}$$

$$AC^2 = a^2 + b^2 + 2ab\cos\alpha. \qquad (2)$$

Додавши рівності (1) і (2), отримаємо:

$$BD^2 + AC^2 = 2a^2 + 2b^2.$$ ◄

Задача 2. У трикутнику ABC сторона AB на 4 см більша за сторону BC, $\angle B = 120°$, $AC = 14$ см. Знайдіть сторони AB і BC.

Розв'язання. За теоремою косинусів

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cdot \cos B.$$

Нехай $BC = x$ см, $x > 0$, тоді $AB = (x + 4)$ см.
Маємо:

$$14^2 = (x + 4)^2 + x^2 - 2x(x + 4)\cos 120°;$$

$$196 = x^2 + 8x + 16 + x^2 - 2x(x + 4) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right);$$

$$196 = 2x^2 + 8x + 16 + x(x + 4);$$

$$3x^2 + 12x - 180 = 0;$$

$$x^2 + 4x - 60 = 0;$$

$$x_1 = 6;\ x_2 = -10.$$

Корінь -10 не задовольняє умову $x > 0$.
Отже, $BC = 6$ см, $AB = 10$ см.
Відповідь: 10 см, 6 см. ◄

Задача 3. На стороні AC трикутника ABC позначено точку D так, що $CD : AD = 1 : 2$. Знайдіть відрізок BD, якщо $AB = 14$ см, $BC = 13$ см, $AC = 15$ см.

Розв'язання. За теоремою косинусів з трикутника ABC (рис. 2.5) отримуємо:

$$AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2AC \cdot BC \cdot \cos C.$$

Звідси $\cos C = \dfrac{AC^2 + BC^2 - AB^2}{2AC \cdot BC} =$

$$= \frac{15^2 + 13^2 - 14^2}{2 \cdot 15 \cdot 13} = \frac{225 + 169 - 196}{2 \cdot 15 \cdot 13} = \frac{33}{65}.$$

Оскільки $CD : AD = 1 : 2$, то $CD = \dfrac{1}{3}AC =$
$= 5$ (см).

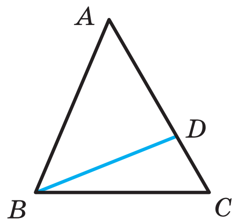


Рис. 2.5

Тоді з трикутника BCD отримуємо:

$$BD^2 = BC^2 + CD^2 - 2BC \cdot CD \cdot \cos C = 13^2 + 5^2 - 2 \cdot 13 \cdot 5 \cdot \frac{33}{65} = 128.$$

Отже, $BD = \sqrt{128} = 8\sqrt{2}$ (см).

Відповідь: $8\sqrt{2}$ см. ◄

Задача 4. Дві сторони трикутника дорівнюють 23 см і 30 см, а медіана, проведена до більшої з відомих сторін, — 10 см. Знайдіть третю сторону трикутника.

Розв'язання. Нехай у трикутнику ABC відомо, що $AC = 23$ см, $BC = 30$ см, відрізок AM — медіана, $AM = 10$ см.

На продовженні відрізка AM за точку M відкладемо відрізок MD, який дорівнює медіані AM (рис. 2.6). Тоді $AD = 20$ см.

У чотирикутнику $ABDC$ діагоналі AD і BC точкою M перетину діляться навпіл ($BM = MC$ за умовою, $AM = MD$ за побудовою). Отже, чотирикутник $ABDC$ — паралелограм.

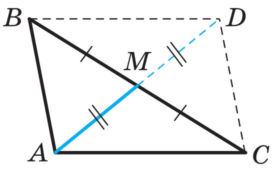


Рис. 2.6

Оскільки сума квадратів діагоналей паралелограма дорівнює сумі квадратів усіх його сторін (див. ключову задачу 1), то

$$AD^2 + BC^2 = 2\,(AB^2 + AC^2).$$

Тоді

$$20^2 + 30^2 = 2\,(AB^2 + 23^2);$$
$$400 + 900 = 2\,(AB^2 + 529);$$
$$AB^2 = 121;$$
$$AB = 11 \text{ см}.$$

Відповідь: 11 см. ◄

?

1. Сформулюйте теорему косинусів.
2. Гострокутним, прямокутним чи тупокутним є трикутник зі сторонами a, b і c, де a — довжина його найбільшої сторони, якщо:
   1) $a^2 < b^2 + c^2$; 2) $a^2 > b^2 + c^2$; 3) $a^2 = b^2 + c^2$?
3. Як пов'язані між собою діагоналі та сторони паралелограма?

ВПРАВИ

2.1.° Знайдіть невідому сторону трикутника ABC, якщо:

1) $AB = 5$ см, $BC = 8$ см, $\angle B = 60°$;

2) $AB = 3$ см, $AC = 2\sqrt{2}$ см, $\angle A = 135°$.

2.2.° Знайдіть невідому сторону трикутника DEF, якщо:

1) $DE = 4$ см, $DF = 2\sqrt{3}$ см, $\angle D = 30°$;

2) $DF = 3$ см, $EF = 5$ см, $\angle F = 120°$.

2.3.° Сторони трикутника дорівнюють 12 см, 20 см і 28 см. Знайдіть найбільший кут трикутника.

2.4.° Сторони трикутника дорівнюють $\sqrt{18}$ см, 5 см і 7 см. Знайдіть середній за величиною кут трикутника.

2.5.° Установіть, гострокутним, прямокутним чи тупокутним є трикутник, сторони якого дорівнюють:

1) 5 см, 7 см і 9 см;

2) 5 см, 12 см і 13 см;

3) 10 см, 15 см і 18 см.

2.6.° Сторони трикутника дорівнюють 7 см, 8 см і 12 см. Чи є даний трикутник гострокутним?

2.7.° Доведіть, що трикутник зі сторонами 8 см, 15 см і 17 см є прямокутним.

2.8.° Сторони паралелограма дорівнюють $2\sqrt{2}$ см і 5 см, а один із кутів дорівнює 45°. Знайдіть діагоналі паралелограма.

2.9.° У трапеції $ABCD$ відомо, що $BC \parallel AD$, $BC = 3$ см, $AD = 10$ см, $CD = 4$ см, $\angle D = 60°$. Знайдіть діагоналі трапеції.

2.10.° На стороні AB рівностороннього трикутника ABC позначено точку D так, що $AD : DB = 2 : 1$. Знайдіть відрізок CD, якщо $AB = 6$ см.

2.11.° На гіпотенузі AB прямокутного трикутника ABC позначено точку M так, що $AM : BM = 1 : 3$. Знайдіть відрізок CM, якщо $AC = BC = 4$ см.

2.12.• Дві сторони трикутника дорівнюють 3 см і 4 см, а синус кута між ними дорівнює $\frac{\sqrt{35}}{6}$. Знайдіть третю сторону трикутника. Скільки розв'язків має задача?

2.13.• У трикутнику ABC відомо, що $\angle C = 90°$, $AC = 20$ см, $BC = 15$ см. На стороні AB позначено точку M так, що $BM = 4$ см. Знайдіть відрізок CM.

2.14.• На продовженні гіпотенузи AB прямокутного рівнобедреного трикутника ABC за точку B позначено точку D так, що $BD = BC$. Знайдіть відрізок CD, якщо катет трикутника ABC дорівнює a.

2.15.• У трикутнику ABC відомо, що $\angle C = 90°$, $AB = 13$ см, $AC = 12$ см. На продовженні гіпотенузи AB за точку B позначено точку D так, що $BD = 26$ см. Знайдіть відрізок CD.

2.16.• Центр кола, вписаного в прямокутний трикутник, знаходиться на відстанях a і b від кінців гіпотенузи. Знайдіть гіпотенузу трикутника.

2.17.• Точка O — центр кола, вписаного в трикутник ABC, $BC = a$, $AC = b$, $\angle AOB = 120°$. Знайдіть сторону AB.

2.18.• Дві сторони трикутника, кут між якими дорівнює 60°, відносяться як 5 : 8, а третя сторона дорівнює 21 см. Знайдіть невідомі сторони трикутника.

2.19.• Дві сторони трикутника відносяться як $1 : 2\sqrt{3}$ і утворюють кут, величина якого становить 30°. Третя сторона трикутника дорівнює $2\sqrt{7}$ см. Знайдіть невідомі сторони трикутника.

2.20.• Сума двох сторін трикутника, які утворюють кут величиною 120°, дорівнює 8 см, а довжина третьої сторони — 7 см. Знайдіть невідомі сторони трикутника.

2.21.• Дві сторони трикутника, кут між якими дорівнює 120°, відносяться як 5 : 3. Знайдіть сторони трикутника, якщо його периметр дорівнює 30 см.

2.22.• Дві сторони трикутника дорівнюють 16 см і 14 см, а кут, протилежний меншій із відомих сторін, дорівнює 60°. Знайдіть невідому сторону трикутника.

2.23.• Дві сторони трикутника дорівнюють 15 см і 35 см, а кут, протилежний більшій із відомих сторін, дорівнює 120°. Знайдіть периметр трикутника.

2.24.• На стороні BC трикутника ABC позначено точку D так, що $CD = 14$ см. Знайдіть відрізок AD, якщо $AB = 37$ см, $BC = 44$ см і $AC = 15$ см.

2.25.• На стороні AB трикутника ABC позначено точку K, а на продовженні сторони BC за точку C — точку M. Знайдіть відрізок MK, якщо $AB = 15$ см, $BC = 7$ см, $AC = 13$ см, $AK = 8$ см, $MC = 3$ см.

2.26.• Одна зі сторін трикутника у 2 рази більша за другу, а кут між цими сторонами становить 60°. Доведіть, що даний трикутник є прямокутним.

2.27.• Доведіть, що коли квадрат сторони трикутника дорівнює неповному квадрату суми двох інших сторін, то протилежний цій стороні кут дорівнює 120°.

2.28.• Доведіть, що коли квадрат сторони трикутника дорівнює неповному квадрату різниці двох інших сторін, то протилежний цій стороні кут дорівнює $60°$.

2.29.• Дві сторони паралелограма дорівнюють 7 см і 11 см, а одна з діагоналей — 12 см. Знайдіть другу діагональ паралелограма.

2.30.• Діагоналі паралелограма дорівнюють 13 см і 11 см, а одна зі сторін — 9 см. Знайдіть периметр паралелограма.

2.31.• Діагоналі паралелограма дорівнюють 8 см і 14 см, а одна зі сторін на 2 см більша за другу. Знайдіть сторони паралелограма.

2.32.• Сторони паралелограма дорівнюють 11 см і 23 см, а його діагоналі відносяться як 2 : 3. Знайдіть діагоналі паралелограма.

2.33.•• У трапеції $ABCD$ відомо, що $AD \parallel BC$, $AB = 5$ см, $BC = 9$ см, $AD = 16$ см, $\cos A = \frac{1}{7}$. Знайдіть сторону CD трапеції.

2.34.•• У трапеції $ABCD$ відомо, що $AD \parallel BC$, $AB = \sqrt{15}$ см, $BC = 6$ см, $CD = 4$ см, $AD = 11$ см. Знайдіть косинус кута D трапеції.

2.35.•• Знайдіть діагональ AC чотирикутника $ABCD$, якщо навколо нього можна описати коло і $AB = 3$ см, $BC = 4$ см, $CD = 5$ см, $AD = 6$ см.

2.36.•• Чи можна описати коло навколо чотирикутника $ABCD$, якщо $AB = 4$ см, $AD = 3$ см, $BD = 6$ см і $\angle C = 30°$?

2.37.•• Доведіть, що проти більшого кута паралелограма лежить більша діагональ. Сформулюйте та доведіть обернене твердження.

2.38.•• Сторони трикутника дорівнюють 12 см, 15 см і 18 см. Знайдіть бісектрису трикутника, проведену з вершини його найбільшого кута.

2.39.•• Основа рівнобедреного трикутника дорівнює 5 см, а бічна сторона — 20 см. Знайдіть бісектрису трикутника, проведену з вершини кута при його основі.

2.40.•• Сторони трикутника дорівнюють 16 см, 18 см і 26 см. Знайдіть медіану трикутника, проведену до його більшої сторони.

2.41.•• Основа рівнобедреного трикутника дорівнює $4\sqrt{2}$ см, а медіана, проведена до бічної сторони, — 5 см. Знайдіть бічну сторону трикутника.

2.42.•• Дві сторони трикутника дорівнюють 12 см і 14 см, а медіана, проведена до третьої сторони, — 7 см. Знайдіть невідому сторону трикутника.

2.43.•• У трикутнику ABC відомо, що $AB = BC$, $\angle ABC = 120°$. На продовженні відрізка AB за точку B позначено точку D так, що $BD = 2AB$. Доведіть, що трикутник ACD рівнобедрений.

2.44.•• Доведіть, що в трикутнику зі сторонами a, b і c виконується рівність $m_c = \frac{1}{2}\sqrt{2a^2 + 2b^2 - c^2}$, де m_c — медіана трикутника, проведена до сторони, довжина якої дорівнює c.

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

2.45. У колі проведено діаметр AC і хорду AB, яка дорівнює радіусу кола. Знайдіть кути трикутника ABC.

2.46. Один із кутів, утворених при перетині бісектриси кута паралелограма з його стороною, дорівнює одному з кутів паралелограма. Знайдіть кути паралелограма.

2.47. У трикутник ABC вписано паралелограм $ADEF$ так, що кут A у них спільний, а точки D, E і F належать відповідно сторонам AB, BC і AC трикутника. Знайдіть сторони паралелограма $ADEF$, якщо $AB = 8$ см, $AC = 12$ см, $AD : AF = 2 : 3$.

ГОТУЄМОСЯ ДО ВИВЧЕННЯ НОВОЇ ТЕМИ

2.48. Знайдіть кут ADC (рис. 2.7), якщо $\angle ABC = 140°$.

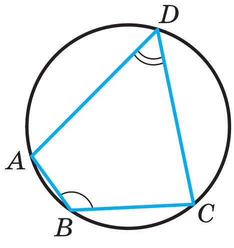


Рис. 2.7

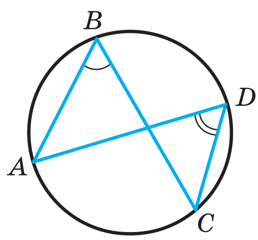


Рис. 2.8

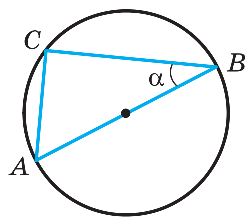


Рис. 2.9

2.49. Знайдіть кут ABC (рис. 2.8), якщо $\angle ADC = 43°$.

2.50. Відрізок AB — діаметр кола, радіус якого дорівнює R, $\angle ABC = \alpha$ (рис. 2.9). Знайдіть хорду AC.

3. Теорема синусів

Під час доведення низки теорем і розв'язування багатьох задач застосовують таку лему.

Лема. ***Хорда кола дорівнює добутку діаметра та синуса будь-якого вписаного кута, який спирається на цю хорду.***

Доведення. ⊙ На рисунку 3.1 відрізок MN — хорда кола із центром у точці O. Проведемо діаметр MP. Тоді $\angle MNP = 90°$ як вписаний кут, що спирається на діаметр. Нехай величина вписаного кута MPN дорівнює α. Тоді з прямокутного трикутника MPN отримуємо:

$$MN = MP \sin \alpha. \quad (1)$$

Усі вписані кути, які спираються на хорду MN, дорівнюють α або $180° - \alpha$. Отже, їхні синуси рівні. Тому отримана рівність (1) справедлива для всіх вписаних кутів, які спираються на хорду MN. ◄

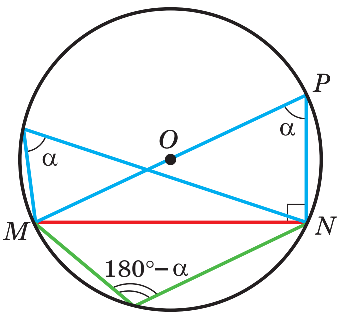


Рис. 3.1

Із другої ознаки рівності трикутників випливає, що сторона та два прилеглих до неї кути однозначно визначають трикутник. Отже, за вказаними елементами можна знайти дві інші сторони трикутника. Як це зробити, підказує така теорема.

Теорема 3.1 (теорема синусів). ***Сторони трикутника пропорційні синусам протилежних кутів.***

Доведення. ⊙ Нехай у трикутнику ABC відомо, що $AB = c$, $BC = a$, $CA = b$. Доведемо, що

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}.$$

Нехай радіус описаного кола трикутника ABC дорівнює R. Тоді за лемою $a = 2R \sin A$, $b = 2R \sin B$, $c = 2R \sin C$. Звідси

$$\boxed{\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R}$$ ◄

Наслідок. ***Радіус кола, описаного навколо трикутника, можна обчислити за формулою***

$$\boxed{\boldsymbol{R = \frac{a}{2\sin\alpha}},}$$

де a — довжина сторони трикутника, α — величина протилежного цій стороні кута.

Задача 1. У трикутнику ABC відомо, що $AC = \sqrt{2}$ см, $BC = 1$ см, $\angle B = 45°$. Знайдіть кут A.

Розв'язання. За теоремою синусів

$$\frac{BC}{\sin A} = \frac{AC}{\sin B}.$$

Тоді

$$\sin A = \frac{BC\sin B}{AC} = \frac{1\cdot\sin 45°}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} : \sqrt{2} = \frac{1}{2}.$$

Оскільки $BC < AC$, то $\angle A < \angle B$. Отже, кут A — гострий. Звідси, ураховуючи, що $\sin A = \frac{1}{2}$, отримуємо $\angle A = 30°$.

Відповідь: 30°. ◄

Задача 2. У трикутнику ABC відомо, що $AC = \sqrt{2}$ см, $BC = 1$ см, $\angle A = 30°$. Знайдіть кут B.

Розв'язання. За теоремою синусів $\frac{BC}{\sin A} = \frac{AC}{\sin B}$. Тоді

$$\sin B = \frac{AC\sin A}{BC} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Оскільки $BC < AC$, то $\angle A < \angle B$. Тоді кут B може бути як гострим, так і тупим. Звідси $\angle B = 45°$ або $\angle B = 180° - 45° = 135°$.

Відповідь: 45° або 135°. ◄

Задача 3. На стороні AB трикутника ABC позначено точку D так, що $\angle BDC = \gamma$, $AD = m$ (рис. 3.2). Знайдіть відрізок BD, якщо $\angle A = \alpha$, $\angle B = \beta$.

Розв'язання. Кут BDC — зовнішній кут трикутника ADC. Тоді $\angle ACD + \angle A = \angle BDC$, звідси $\angle ACD = \gamma - \alpha$.

Із трикутника ADC за теоремою синусів отримуємо:

$$\frac{CD}{\sin\angle CAD} = \frac{AD}{\sin\angle ACD}.$$

Отже, $CD = \dfrac{AD \sin \angle CAD}{\sin \angle ACD} = \dfrac{m \sin \alpha}{\sin (\gamma - \alpha)}$.

Із трикутника BCD за теоремою синусів отримуємо:

$$\frac{BD}{\sin \angle BCD} = \frac{CD}{\sin \angle CBD}.$$

Отже,

$$BD = \frac{CD \sin \angle BCD}{\sin \angle CBD} =$$

$$= \frac{m \sin \alpha \sin (180° - (\beta + \gamma))}{\sin \beta \sin (\gamma - \alpha)} = \frac{m \sin \alpha \sin (\beta + \gamma)}{\sin \beta \sin (\gamma - \alpha)}.$$

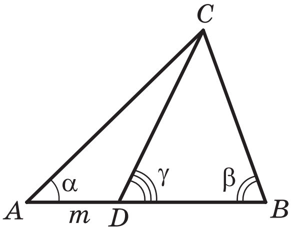


Рис. 3.2

Відповідь: $\dfrac{m \sin \alpha \sin (\beta + \gamma)}{\sin \beta \sin (\gamma - \alpha)}$. ◀

Задача 4. Відрізок BD — бісектриса трикутника ABC, $\angle ABC = 30°$, $\angle C = 105°$ (рис. 3.3). Знайдіть радіус кола, описаного навколо трикутника ABC, якщо радіус кола, описаного навколо трикутника BDC, дорівнює $8\sqrt{6}$ см.

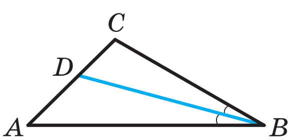


Рис. 3.3

Розв'язання. Нехай R_1 — радіус кола, описаного навколо трикутника BDC, $R_1 = 8\sqrt{6}$ см.

Оскільки відрізок BD — бісектриса трикутника, то $\angle CBD = \dfrac{1}{2}\angle ABC = 15°$.

Із трикутника BDC отримуємо:

$$\angle BDC = 180° - (\angle CBD + \angle C) = 180° - (15° + 105°) = 60°.$$

За наслідком з теореми синусів $\dfrac{BC}{2 \sin \angle BDC} = R_1$. Звідси

$$BC = 2R_1 \sin \angle BDC = 2 \cdot 8\sqrt{6} \sin 60° = 24\sqrt{2} \text{ (см)}.$$

Із трикутника ABC отримуємо:

$$\angle A = 180° - (\angle ABC + \angle C) = 180° - (30° + 105°) = 45°.$$

Нехай R — шуканий радіус кола, описаного навколо трикутника ABC.

Тоді $\dfrac{BC}{2 \sin A} = R$, звідси $R = \dfrac{BC}{2 \sin A} = \dfrac{24\sqrt{2}}{2 \sin 45°} = 24$ (см).

Відповідь: 24 см. ◀

1. Як знайти хорду кола, якщо відомо діаметр кола та вписаний кут, який спирається на цю хорду?
2. Сформулюйте теорему синусів.
3. Як знайти радіус кола, описаного навколо трикутника зі стороною a та протилежним цій стороні кутом α?

ВПРАВИ

3.1.° Знайдіть сторону BC трикутника ABC, зображеного на рисунку 3.4 (довжину відрізка дано в сантиметрах).

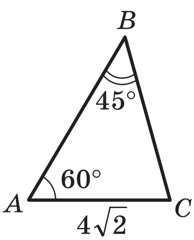


Рис. 3.4

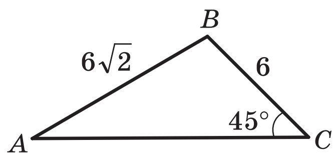


Рис. 3.5

3.2.° Знайдіть кут A трикутника ABC, зображеного на рисунку 3.5 (довжини відрізків дано в сантиметрах).

3.3.° Знайдіть сторону AB трикутника ABC, якщо $AC = \sqrt{6}$ см, $\angle B = 120°$, $\angle C = 45°$.

3.4.° У трикутнику ABC відомо, що $AB = 12$ см, $BC = 10$ см, $\sin A = 0{,}2$. Знайдіть синус кута C трикутника.

3.5.° У трикутнику DEF відомо, що $DE = 16$ см, $\angle F = 50°$, $\angle D = 38°$. Знайдіть сторону EF.

3.6.° У трикутнику MKP відомо, що $KP = 8$ см, $\angle K = 106°$, $\angle P = 32°$. Знайдіть сторону MP.

3.7.° Для знаходження відстані від точки A до дзвіниці B, яка розташована на другому березі річки (рис. 3.6), за допомогою віх, рулетки та приладу для вимірювання кутів (теодоліту) позначили на місцевості точку C таку, що $\angle BAC = 42°$, $\angle ACB = 64°$, $AC = 20$ м. Як знайти відстань від точки A до дзвіниці B? Знайдіть цю відстань.

Рис. 3.6

3.8.° У трикутнику ABC відомо, що $BC = a$, $\angle A = \alpha$, $\angle C = \gamma$. Знайдіть сторони AB і AC.

3.9.° Діагональ паралелограма дорівнює d і утворює з його сторонами кути α і β. Знайдіть сторони паралелограма.

3.10.° Знайдіть кут A трикутника ABC, якщо:
1) $AC = 2$ см, $BC = 1$ см, $\angle B = 135°$;
2) $AC = \sqrt{2}$ см, $BC = \sqrt{3}$ см, $\angle B = 45°$.
Скільки розв'язків у кожному з випадків має задача? Відповідь обґрунтуйте.

3.11.° Чи існує трикутник ABC такий, що $\sin A = 0{,}4$, $AC = 18$ см, $BC = 6$ см? Відповідь обґрунтуйте.

3.12.° У трикутнику DEF відомо, що $DE = 8$ см, $\sin F = 0{,}16$. Знайдіть радіус кола, описаного навколо трикутника DEF.

3.13.° Радіус кола, описаного навколо трикутника MKP, дорівнює 5 см, $\sin M = 0{,}7$. Знайдіть сторону KP.

3.14.• На продовженні сторони AB трикутника ABC за точку B позначили точку D. Знайдіть радіус кола, описаного навколо трикутника ACD, якщо $\angle ABC = 60°$, $\angle ADC = 45°$, а радіус кола, описаного навколо трикутника ABC, дорівнює 4 см.

3.15.• Радіус кола, описаного навколо трикутника ABC, дорівнює 6 см. Знайдіть радіус кола, описаного навколо трикутника AOC, де O — точка перетину бісектрис трикутника ABC, якщо $\angle ABC = 60°$.

3.16.• Використовуючи дані рисунка 3.7, знайдіть відрізок AD, якщо $CD = a$, $\angle BAC = \gamma$, $\angle DBA = \beta$.

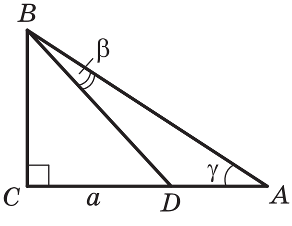


Рис. 3.7

3.17.$^{\bullet}$ Використовуючи дані рисунка 3.8, знайдіть відрізок AC, якщо $BD = m$, $\angle ABC = \alpha$, $\angle ADC = \beta$.

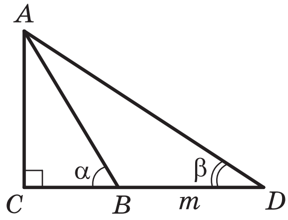


Рис. 3.8

3.18.$^{\bullet}$ На стороні AB трикутника ABC позначили точку M так, що $\angle AMC = \varphi$. Знайдіть відрізок CM, якщо $AB = c$, $\angle A = \alpha$, $\angle ACB = \gamma$.

3.19.$^{\bullet}$ У трикутнику ABC відомо, що $\angle A = \alpha$, $\angle B = \beta$. На стороні BC позначили точку D так, що $\angle ADB = \varphi$, $AD = m$. Знайдіть сторону BC.

3.20.$^{\bullet}$ Доведіть, що бісектриса трикутника ділить його сторону на відрізки, довжини яких обернено пропорційні синусам прилеглих до цієї сторони кутів.

3.21.$^{\bullet}$ Дві сторони трикутника дорівнюють 6 см і 12 см, а висота, проведена до третьої сторони, — 4 см. Знайдіть радіус кола, описаного навколо даного трикутника.

3.22.$^{\bullet}$ Знайдіть радіус кола, описаного навколо рівнобедреного трикутника з основою 16 см і бічною стороною 10 см.

3.23.$^{\bullet}$ Сторона трикутника дорівнює 24 см, а радіус описаного кола — $8\sqrt{3}$ см. Чому дорівнює кут трикутника, протилежний даній стороні?

3.24.$^{\bullet}$ Траса для велосипедистів має форму трикутника, два кути якого дорівнюють $50°$ і $100°$. Меншу сторону цього трикутника один із велосипедистів проїжджає за 1 год. За який час він проїде всю трасу? Відповідь подайте в годинах, округливши її до десятих.

3.25.$^{\bullet\bullet}$ У трикутнику ABC відомо, що $AC = b$, $\angle A = \alpha$, $\angle C = \gamma$. Знайдіть бісектрису BD трикутника.

3.26.$^{\bullet\bullet}$ Основа рівнобедреного трикутника дорівнює a, протилежний їй кут дорівнює α. Знайдіть бісектрису трикутника, проведену з вершини кута при основі.

3.27.$^{\bullet\bullet}$ Доведіть, користуючись теоремою синусів, що бісектриса трикутника ділить його сторону на відрізки, довжини яких пропорційні прилеглим сторонам[1].

---

[1] Нагадаємо, що твердження з використанням теореми про пропорційні відрізки було доведено в підручнику: А. Г. Мерзляк, В. Б. Полонський, М. С. Якір. Геометрія : підруч. для 8 кл. загальноосвіт. навч. закладів. — Х.: Гімназія, 2016. Далі посилатимемося на цей підручник так: «Геометрія. 8 клас».

3.28.•• Основи рівнобічної трапеції дорівнюють 9 см і 21 см, а висота — 8 см. Знайдіть радіус кола, описаного навколо трапеції.

3.29.•• Відрізок CD — бісектриса трикутника ABC, у якому $\angle A = \alpha$, $\angle B = \beta$. Через точку D проведено пряму, яка паралельна стороні BC і перетинає сторону AC у точці E, причому $AE = a$. Знайдіть відрізок CE.

3.30.•• Медіана AM трикутника ABC дорівнює m і утворює зі сторонами AB і AC кути α і β відповідно. Знайдіть сторони AB і AC.

3.31.•• Медіана CD трикутника ABC утворює зі сторонами AC і BC кути α і β відповідно, $BC = a$. Знайдіть медіану CD.

3.32.•• Висоти гострокутного трикутника ABC перетинаються в точці H. Доведіть, що радіуси кіл, описаних навколо трикутників AHB, BHC, AHC і ABC, рівні.

3.33.•• Дороги, які сполучають села A, B і C (рис. 3.9), утворюють трикутник, причому дорога із села A до села C заасфальтована, а дороги із села A до села B та із села B до села C — ґрунтові. Дороги, які ведуть із села A до сіл B і C, утворюють кут, величина якого $15°$, а дороги, які ведуть із села B до сіл A і C, — кут, величина якого $5°$. Швидкість руху автомобіля по асфальтованій дорозі у 2 рази більша за швидкість його руху по ґрунтовій. Який шлях вибрати водію автомобіля, щоб якнайшвидше дістатися із села A до села B?

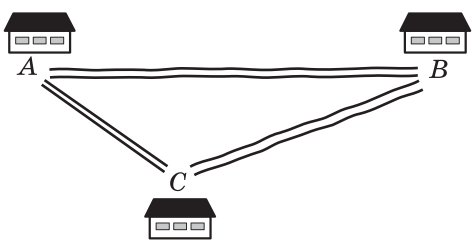


Рис. 3.9

3.34.•• Дороги із сіл A і B сходяться біля розвилки C (рис. 3.10). Дорога із села A до розвилки утворює з дорогою із села A в село B кут, величина якого $30°$, а дорога із села B до розвилки утворює з дорогою із села B в село A кут, величина якого $70°$. Одночасно із села A до розвилки виїхав автомобіль зі швидкістю 90 км/год, а із села B — автобус зі швидкістю 60 км/год. Хто з них першим доїде до розвилки?

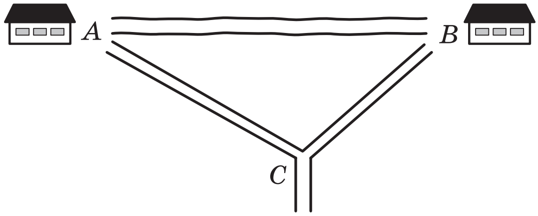


Рис. 3.10

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

3.35. Бісектриси кутів B і C прямокутника $ABCD$ перетинають сторону AD у точках M і K відповідно. Доведіть, що $BM = CK$.

3.36. На рисунку 3.11 $DE \parallel AC$, $FK \parallel AB$. Укажіть, які трикутники на цьому рисунку подібні.

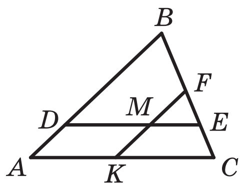


Рис. 3.11

3.37. На стороні AB квадрата $ABCD$ позначено точку K, а на стороні CD — точку M так, що $AK : KB = 1 : 2$, $DM : MC = 3 : 1$. Знайдіть сторону квадрата, якщо $MK = 13$ см.

ГОТУЄМОСЯ ДО ВИВЧЕННЯ НОВОЇ ТЕМИ

3.38. Розв'яжіть прямокутний трикутник:

1) за двома катетами $a = 7$ см і $b = 35$ см;
2) за гіпотенузою $c = 17$ см і катетом $a = 8$ см;
3) за гіпотенузою $c = 4$ см і гострим кутом $\alpha = 50°$;
4) за катетом $a = 8$ см і протилежним кутом $\alpha = 42°$.

СПОСТЕРІГАЙТЕ, РИСУЙТЕ, КОНСТРУЮЙТЕ, ФАНТАЗУЙТЕ

3.39. У коло радіуса 1 см вписано п'ятикутник. Доведіть, що сума довжин його сторін і діагоналей менша від 17 см.

4. Розв'язування трикутників

Розв'язати трикутник означає знайти невідомі його сторони та кути за відомими сторонами та кутами[1].

У 8 класі ви навчилися розв'язувати прямокутні трикутники. Теореми косинусів і синусів дають змогу розв'язати будь-який трикутник.

У наступних задачах значення тригонометричних функцій будемо знаходити за допомогою калькулятора й округлювати ці значення до сотих. Величини кутів будемо знаходити за допомогою калькулятора й округлювати ці значення до одиниць. Обчислюючи довжини сторін, результат будемо округлювати до десятих.

Задача 1. Розв'яжіть трикутник (рис. 4.1) за стороною $a = 12$ см і двома кутами $\beta = 36°$, $\gamma = 119°$.

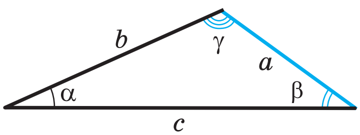


Рис. 4.1

Розв'язання. Використовуючи теорему про суму кутів трикутника, отримуємо: $\alpha = 180° - (\beta + \gamma) = 180° - 155° = 25°$.

За теоремою синусів $\frac{b}{\sin\beta} = \frac{a}{\sin\alpha}$.

Звідси $b = \frac{a\sin\beta}{\sin\alpha}$. Маємо:

$$b = \frac{12\sin 36°}{\sin 25°} \approx \frac{12 \cdot 0{,}59}{0{,}42} \approx 16{,}9 \ \text{(см)}.$$

Знову застосовуючи теорему синусів, запишемо:

$$\frac{c}{\sin\gamma} = \frac{a}{\sin\alpha}.$$

Звідси $c = \frac{a\sin\gamma}{\sin\alpha}$.

Маємо:

$$c = \frac{12\sin 119°}{\sin 25°} = \frac{12\sin 61°}{\sin 25°} \approx \frac{12 \cdot 0{,}87}{0{,}42} \approx 24{,}9 \ \text{(см)}.$$

Відповідь: $b \approx 16{,}9$ см, $c \approx 24{,}9$ см, $\alpha = 25°$. ◄

Задача 2. Розв'яжіть трикутник за двома сторонами $a = 14$ см, $b = 8$ см і кутом $\gamma = 38°$ між ними.

[1] У задачах цього пункту та вправах 4.1–4.9 прийнято позначення: a, b і c — довжини сторін трикутника, α, β і γ — величини кутів, протилежних відповідно сторонам з довжинами a, b і c.

Розв'язання. За теоремою косинусів $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$. Звідси

$$c^2 = 196 + 64 - 2\cdot 14\cdot 8\cos 38^\circ \approx 260 - 224\cdot 0{,}79 = 83{,}04;$$

$$c \approx 9{,}1 \text{ см.}$$

Далі маємо:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha;$$

$$\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc};\quad \cos\alpha \approx \frac{8^2 + 9{,}1^2 - 14^2}{2\cdot 8\cdot 9{,}1} \approx -0{,}34.$$

Звідси $\alpha \approx 110^\circ$.

Використовуючи теорему про суму кутів трикутника, отримуємо:

$$\beta = 180^\circ - (\alpha + \gamma);\quad \beta \approx 180^\circ - 148^\circ = 32^\circ.$$

Відповідь: $c \approx 9{,}1$ см, $\alpha \approx 110^\circ$, $\beta \approx 32^\circ$. ◄

Задача 3. Розв'яжіть трикутник за трьома сторонами $a = 7$ см, $b = 2$ см, $c = 8$ см.

Розв'язання. За теоремою косинусів $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$. Звідси

$$\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc};\quad \cos\alpha = \frac{4 + 64 - 49}{2\cdot 2\cdot 8} \approx 0{,}59. \text{ Отримуємо: } \alpha \approx 54^\circ.$$

За теоремою синусів $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta}$. Звідси

$$\sin\beta = \frac{b\sin\alpha}{a};\quad \sin\beta \approx \frac{2\sin 54^\circ}{7} \approx \frac{2\cdot 0{,}81}{7} \approx 0{,}23.$$

Оскільки b — довжина найменшої сторони даного трикутника, то кут β є гострим. Тоді знаходимо, що $\beta \approx 13^\circ$.

Використовуючи теорему про суму кутів трикутника, отримуємо:

$$\gamma = 180^\circ - (\alpha + \beta);\quad \gamma \approx 180^\circ - 67^\circ = 113^\circ.$$

Відповідь: $\alpha \approx 54^\circ$, $\beta \approx 13^\circ$, $\gamma \approx 113^\circ$. ◄

Задача 4. Розв'яжіть трикутник за двома сторонами та кутом, протилежним одній зі сторін:

1) $a = 17$ см, $b = 6$ см, $\alpha = 156^\circ$;
2) $b = 7$ см, $c = 8$ см, $\beta = 65^\circ$;
3) $a = 6$ см, $b = 5$ см, $\beta = 50^\circ$.

Розв'язання. 1) За теоремою синусів $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta}$. Звідси

$$\sin\beta = \frac{b\sin\alpha}{a};\quad \sin\beta = \frac{6\sin 156^\circ}{17} = \frac{6\sin 24^\circ}{17} \approx \frac{6\cdot 0{,}41}{17} \approx 0{,}14.$$

Оскільки кут α даного трикутника тупий, то кут β є гострим. Тоді знаходимо, що $\beta \approx 8°$.

Використовуючи теорему про суму кутів трикутника, отримуємо: $\gamma = 180° - (\alpha + \beta)$; $\gamma \approx 16°$.

За теоремою синусів $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{c}{\sin\gamma}$.

Звідси $c = \frac{a\sin\gamma}{\sin\alpha}$; $c \approx \frac{17\sin 16°}{\sin 156°} \approx \frac{17 \cdot 0{,}28}{0{,}41} \approx 11{,}6$ (см).

Відповідь: $\beta \approx 8°$, $\gamma \approx 16°$, $c \approx 11{,}6$ см.

2) За теоремою синусів $\frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$.

Звідси $\sin\gamma = \frac{c\sin\beta}{b}$; $\sin\gamma = \frac{8\sin 65°}{7} \approx \frac{8 \cdot 0{,}91}{7} = 1{,}04 > 1$, що неможливо.

Відповідь: задача не має розв'язку.

3) За теоремою синусів $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta}$. Звідси

$$\sin\alpha = \frac{a\sin\beta}{b};\quad \sin\alpha = \frac{6\sin 50°}{5} \approx \frac{6 \cdot 0{,}77}{5} \approx 0{,}92.$$

Можливі два випадки: $\alpha \approx 67°$ або $\alpha \approx 180° - 67° = 113°$.

Розглянемо випадок, коли $\alpha \approx 67°$.

Використовуючи теорему про суму кутів трикутника, отримуємо:

$$\gamma = 180° - (\alpha + \beta);\ \gamma \approx 180° - 117° = 63°.$$

За теоремою синусів $\frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$.

Звідси $c = \frac{b\sin\gamma}{\sin\beta}$; $c \approx \frac{5\sin 63°}{\sin 50°} \approx \frac{5 \cdot 0{,}89}{0{,}77} \approx 5{,}8$ (см).

Розглянемо випадок, коли $\alpha \approx 113°$.

Використовуючи теорему про суму кутів трикутника, отримуємо:

$$\gamma = 180° - (\alpha + \beta);\ \gamma \approx 180° - 163° = 17°.$$

Оскільки $c = \frac{b\sin\gamma}{\sin\beta}$, то $c \approx \frac{5\sin 17°}{\sin 50°} \approx \frac{5 \cdot 0{,}29}{0{,}77} \approx 1{,}9$ (см).

Відповідь: $\alpha \approx 67°$, $\gamma \approx 63°$, $c \approx 5{,}8$ см або $\alpha \approx 113°$, $\gamma \approx 17°$, $c \approx 1{,}9$ см. ◄

Що означає розв'язати трикутник?

ВПРАВИ

4.1.° Розв'яжіть трикутник за стороною та двома кутами:
1) $a = 10$ см, $\beta = 20°$, $\gamma = 85°$; 2) $b = 16$ см, $\alpha = 40°$, $\beta = 110°$.

4.2.° Розв'яжіть трикутник за стороною та двома кутами:
1) $b = 9$ см, $\alpha = 35°$, $\gamma = 70°$; 2) $c = 14$ см, $\beta = 132°$, $\gamma = 24°$.

4.3.° Розв'яжіть трикутник за двома сторонами та кутом між ними:
1) $b = 18$ см, $c = 22$ см, $\alpha = 76°$;
2) $a = 20$ см, $b = 15$ см, $\gamma = 104°$.

4.4.° Розв'яжіть трикутник за двома сторонами та кутом між ними:
1) $a = 8$ см, $c = 6$ см, $\beta = 15°$; 2) $b = 7$ см, $c = 5$ см, $\alpha = 145°$.

4.5.° Розв'яжіть трикутник за трьома сторонами:
1) $a = 4$ см, $b = 5$ см, $c = 7$ см; 2) $a = 26$ см, $b = 19$ см, $c = 42$ см.

4.6.° Розв'яжіть трикутник за трьома сторонами:
1) $a = 5$ см, $b = 6$ см, $c = 8$ см; 2) $a = 21$ см, $b = 17$ см, $c = 32$ см.

4.7.° Розв'яжіть трикутник, у якому:
1) $a = 10$ см, $b = 3$ см, $\beta = 10°$, кут α гострий;
2) $a = 10$ см, $b = 3$ см, $\beta = 10°$, кут α тупий.

4.8.• Розв'яжіть трикутник за двома сторонами та кутом, який лежить проти однієї з даних сторін:
1) $a = 7$ см, $b = 11$ см, $\beta = 46°$; 3) $a = 7$ см, $c = 3$ см, $\gamma = 27°$.
2) $b = 15$ см, $c = 17$ см, $\beta = 32°$;

4.9.• Розв'яжіть трикутник за двома сторонами та кутом, який лежить проти однієї з даних сторін:
1) $a = 23$ см, $c = 30$ см, $\gamma = 102°$;
2) $a = 18$ см, $b = 25$ см, $\alpha = 36°$.

4.10.• У трикутнику ABC відомо, що $AB = BC = 20$ см, $\angle A = 70°$. Знайдіть:
1) сторону AC;
2) медіану CM;
3) бісектрису AD;
4) радіус описаного кола трикутника ABC.

4.11.• Діагональ AC рівнобічної трапеції $ABCD$ $(BC \parallel AD)$ дорівнює 8 см, $\angle CAD = 38°$, $\angle BAD = 72°$. Знайдіть:
1) сторони трапеції;
2) радіус описаного кола трикутника ABC.

4.12.•• Основи трапеції дорівнюють 12 см і 16 см, а бічні сторони — 7 см і 9 см. Знайдіть кути трапеції.

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

4.13. Бісектриса кута B паралелограма $ABCD$ перетинає його сторону AD у точці M, а продовження сторони CD за точку D — у точці K. Знайдіть відрізок DK, якщо $AM = 8$ см, а периметр паралелограма дорівнює 50 см.

4.14. Периметр одного з двох подібних трикутників на 18 см менший від периметра другого трикутника, а дві відповідні сторони цих трикутників дорівнюють 5 см і 8 см. Знайдіть периметри даних трикутників.

ГОТУЄМОСЯ ДО ВИВЧЕННЯ НОВОЇ ТЕМИ

4.15. Точка M — середина сторони CD прямокутника $ABCD$ (рис. 4.2), $AB = 6$ см, $AD = 5$ см. Чому дорівнює площа трикутника ACM?

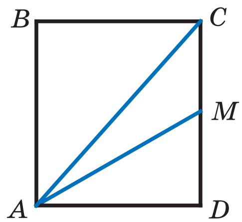


Рис. 4.2

4.16. На стороні AC трикутника ABC позначено точку D так, що $\angle ADB = \alpha$. Доведіть, що $S_{ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot BD \sin \alpha$.

ТРИГОНОМЕТРІЯ — НАУКА ПРО ВИМІРЮВАННЯ ТРИКУТНИКІВ

Ви знаєте, що стародавні мандрівники орієнтувалися за зорями та планетами. Вони могли досить точно визначити місцезнаходження корабля в океані або каравану в пустелі за розташуванням світил на небосхилі. При цьому одним з орієнтирів була висота, на яку піднімалося над горизонтом те або інше небесне світило в даній місцевості в певний момент часу.

Зрозуміло, що безпосередньо виміряти цю висоту неможливо. Тому вчені стали розробляти методи непрямих вимірювань. Тут істотну роль відігравало розв'язування трикутника, дві вершини якого лежали на поверхні Землі, а третя була зорею (рис. 4.3) — відома вам задача 3.17.

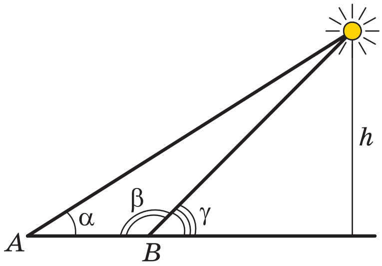


Рис. 4.3

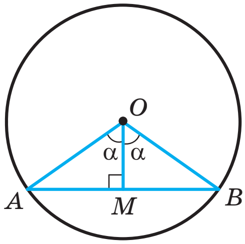


Рис. 4.4

Для розв'язування подібних задач стародавнім астрономам потрібно було навчитися знаходити взаємозв'язки між елементами трикутника. Так виникла **тригонометрія** — наука, яка вивчає залежність між сторонами та кутами трикутника. Термін «тригонометрія» (від грецьких слів «тригонон» — трикутник і «метрео» — вимірювати) означає «вимірювання трикутників».

На рисунку 4.4 зображено центральний кут AOB, який дорівнює 2α. Із прямокутного трикутника OMB маємо: $MB = OB \sin \alpha$. Отже, якщо в одиничному колі виміряти половини довжин хорд, на які спираються центральні кути з величинами $2°$, $4°$, $6°$, ..., $180°$, то таким чином ми обчислимо значення синусів кутів $1°$, $2°$, $3°$, ..., $90°$ відповідно.

Вимірюючи довжини півхорд, давньогрецький астроном Гіппарх (II ст. до н. е.) склав перші тригонометричні таблиці.

Поняття синуса й косинуса з'являються в тригонометричних трактатах індійських учених у IV–V ст. н. е. У X ст. арабські вчені оперували поняттям тангенса, яке виникло з потреб гномоніки — учення про сонячний годинник (рис. 4.5).

Рис. 4.5

У Європі першою роботою, у якій тригонометрія розглядалася як окрема наука, був трактат «П'ять книг про трикутники всіх видів», уперше надрукований у 1533 р. Його автором був німецький

Леонард Ейлер
(1707–1783)

Видатний математик, фізик, механік і астроном, автор понад 860 наукових праць, член Петербурзької, Берлінської, Паризької академій наук, Лондонського королівського товариства, багатьох інших академій та наукових товариств. Ім'я Ейлера зустрічається майже в усіх областях математики: теореми Ейлера, тотожності Ейлера, кути, функції, інтеграли, формули, рівняння, підстановки тощо.

учений Реґіомонтан (1436–1476). Цей же вчений відкрив і теорему тангенсів:

$$\frac{a-b}{a+b}=\frac{\operatorname{tg}\frac{\alpha-\beta}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2}},\quad \frac{b-c}{b+c}=\frac{\operatorname{tg}\frac{\beta-\gamma}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\beta+\gamma}{2}},\quad \frac{c-a}{c+a}=\frac{\operatorname{tg}\frac{\gamma-\alpha}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\gamma+\alpha}{2}},$$

де a, b і c — довжини сторін трикутника, α, β і γ — величини кутів трикутника, протилежних відповідно сторонам з довжинами a, b і c.

Сучасного вигляду тригонометрія набула в роботах великого математика Леонарда Ейлера.

5. Формули для знаходження площі трикутника

Із курсу геометрії 8 класу ви знаєте, що площу S трикутника зі сторонами a, b і c та висотами h_a, h_b і h_c можна обчислити за формулами

$$S=\frac{1}{2}ah_a=\frac{1}{2}bh_b=\frac{1}{2}ch_c.$$

Тепер у нас з'явилася можливість отримати ще кілька формул для знаходження площі трикутника.

Теорема 5.1. ***Площа трикутника дорівнює половині добутку двох його сторін і синуса кута між ними.***

Доведення. Розглянемо трикутник ABC, площа якого дорівнює S, такий, що $BC=a$, $AC=b$ і $\angle C=\gamma$. Доведемо, що

$$\boxed{S=\frac{1}{2}ab\sin\gamma}$$

Можливі три випадки:
1) кут γ гострий (рис. 5.1);
2) кут γ тупий (рис. 5.2);
3) кут γ прямий.

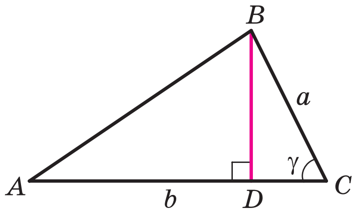


Рис. 5.1

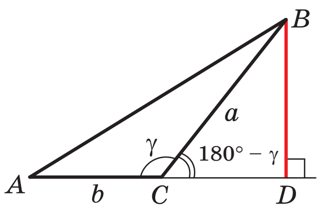


Рис. 5.2

На рисунках 5.1 і 5.2 проведемо висоту BD трикутника ABC. Тоді $S = \frac{1}{2} BD \cdot AC = \frac{1}{2} BD \cdot b.$

Із прямокутного трикутника BDC у першому випадку (див. рис. 5.1) отримуємо: $BD = a \sin \gamma$, а в другому (див. рис. 5.2): $BD = a \sin (180° - \gamma) = a \sin \gamma$. Звідси для двох перших випадків маємо: $S = \frac{1}{2} ab \sin \gamma.$

Якщо кут C прямий, то $\sin \gamma = 1$. Для прямокутного трикутника ABC із катетами a і b маємо:

$$S = \frac{1}{2} ab = \frac{1}{2} ab \sin 90° = \frac{1}{2} ab \sin \gamma. \blacktriangleleft$$

Теорема 5.2 (формула Герона[1]). ***Площу S трикутника зі сторонами a, b і c можна обчислити за формулою***

$$\boxed{S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},}$$

де p — його півпериметр.

Доведення. Розглянемо трикутник ABC, площа якого дорівнює S, такий, що $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$. Доведемо, що

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

[1] Герон Александрійський — давньогрецький учений, який жив у I ст. н. е. Його математичні праці є енциклопедією прикладної математики.

Нехай $\angle C = \gamma$. Запишемо формулу площі трикутника:

$S = \frac{1}{2}ab\sin\gamma$. Звідси $S^2 = \frac{1}{4}a^2b^2\sin^2\gamma$.

За теоремою косинусів $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$.

Тоді $\cos\gamma = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$.

Оскільки $\sin^2\gamma = 1 - \cos^2\gamma = (1-\cos\gamma)(1+\cos\gamma)$, то:

$$S^2 = \frac{1}{4}a^2b^2(1-\cos\gamma)(1+\cos\gamma) =$$

$$= \frac{1}{4}a^2b^2 \cdot \left(1 - \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}\right)\left(1+\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}\right) =$$

$$= \frac{1}{4}a^2b^2 \cdot \frac{2ab-a^2-b^2+c^2}{2ab} \cdot \frac{2ab+a^2+b^2-c^2}{2ab} =$$

$$= \frac{1}{16}(c^2-(a-b)^2)((a+b)^2-c^2) =$$

$$= \frac{c-a+b}{2} \cdot \frac{c+a-b}{2} \cdot \frac{a+b-c}{2} \cdot \frac{a+b+c}{2} =$$

$$= \frac{(a+b+c)-2a}{2} \cdot \frac{(a+b+c)-2b}{2} \cdot \frac{(a+b+c)-2c}{2} \cdot \frac{a+b+c}{2} =$$

$$= \frac{2p-2a}{2} \cdot \frac{2p-2b}{2} \cdot \frac{2p-2c}{2} \cdot \frac{2p}{2} = p(p-a)(p-b)(p-c).$$

Звідси $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$. ◀

Теорема 5.3. ***Площу S трикутника зі сторонами a, b і c можна обчислити за формулою***

$$\boxed{S = \frac{abc}{4R},}$$

де R — радіус кола, описаного навколо трикутника.

Доведення. ⊙ Розглянемо трикутник ABC, площа якого дорівнює S, такий, що $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$. Доведемо, що $S = \frac{abc}{4R}$, де R — радіус описаного кола трикутника.

Нехай $\angle A = \alpha$. Запишемо формулу площі трикутника:

$$S = \frac{1}{2}bc\sin\alpha.$$

Із леми п. 3 випливає, що $\sin\alpha = \frac{a}{2R}$.

Тоді $S = \frac{1}{2}bc\sin\alpha = \frac{1}{2}bc \cdot \frac{a}{2R} = \frac{abc}{4R}$. ◀

Зауважимо, що доведена теорема дає змогу знаходити радіус описаного кола трикутника за формулою

$$\boxed{R = \frac{abc}{4S}}$$

Теорема 5.4. ***Площа трикутника дорівнює добутку його півпериметра та радіуса вписаного кола.***

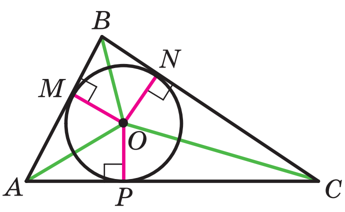


Рис. 5.3

Доведення. На рисунку 5.3 зображено трикутник ABC, у який вписано коло радіуса r. Доведемо, що

$$\boxed{S = pr,}$$

де S — площа даного трикутника, p — його півпериметр.

Нехай точка O — центр вписаного кола, яке дотикається до сторін трикутника ABC у точках M, N і P. Площа трикутника ABC дорівнює сумі площ трикутників AOB, BOC і COA:

$$S = S_{AOB} + S_{BOC} + S_{COA}.$$

Проведемо радіуси в точки дотику. Отримуємо: $OM \perp AB$, $ON \perp BC$, $OP \perp CA$. Звідси:

$$S_{AOB} = \frac{1}{2} OM \cdot AB = \frac{1}{2} r \cdot AB;$$

$$S_{BOC} = \frac{1}{2} ON \cdot BC = \frac{1}{2} r \cdot BC;$$

$$S_{COA} = \frac{1}{2} OP \cdot AC = \frac{1}{2} r \cdot AC.$$

Отже, $S = \frac{1}{2} r \cdot AB + \frac{1}{2} r \cdot BC + \frac{1}{2} r \cdot AC = r \cdot \frac{AB + BC + AC}{2} = pr.$ ◄

Теорему 5.4 узагальнює така теорема.

Теорема 5.5. ***Площа описаного многокутника дорівнює добутку його півпериметра та радіуса вписаного кола.***

Доведіть цю теорему самостійно (рис. 5.4).

Зауважимо, що теорема 5.5 дає змогу знаходити радіус вписаного кола многокутника за формулою

$$\boxed{r = \frac{S}{p}}$$

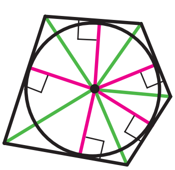


Рис. 5.4

Задача 1. Доведіть, що площу S паралелограма можна обчислити за формулою

$$\boxed{S = ab\sin\alpha,}$$

де a і b — довжини сусідніх сторін паралелограма, α — кут між ними.

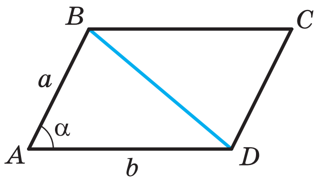


Рис. 5.5

Розв'язання. Розглянемо паралелограм $ABCD$, у якому $AB = a$, $AD = b$, $\angle BAD = \alpha$ (рис. 5.5). Проведемо діагональ BD. Оскільки $\Delta ABD = \Delta CBD$, то запишемо:

$$S_{ABCD} = 2S_{ABD} = 2\cdot\frac{1}{2}ab\sin\alpha = ab\sin\alpha. \blacktriangleleft$$

Задача 2. Доведіть, що площа опуклого чотирикутника дорівнює половині добутку його діагоналей і синуса кута між ними.

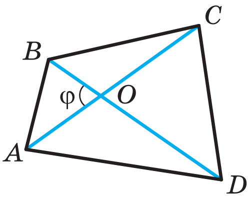


Рис. 5.6

Розв'язання. Нехай кут між діагоналями AC і BD чотирикутника $ABCD$ дорівнює φ. На рисунку 5.6 $\angle AOB = \varphi$. Тоді $\angle BOC = \angle AOD = 180° - \varphi$ і $\angle COD = \varphi$. Маємо:

$$S_{ABCD} = S_{AOB} + S_{BOC} + S_{COD} + S_{DOA} =$$

$$= \frac{1}{2}OB\cdot OA\cdot\sin\varphi + \frac{1}{2}OB\cdot OC\cdot\sin(180° - \varphi) +$$

$$+ \frac{1}{2}OC\cdot OD\cdot\sin\varphi + \frac{1}{2}OD\cdot OA\cdot\sin(180° - \varphi) =$$

$$= \frac{1}{2}OB(OA + OC)\cdot\sin\varphi + \frac{1}{2}OD(OC + OA)\cdot\sin\varphi =$$

$$= \frac{1}{2}OB\cdot AC\cdot\sin\varphi + \frac{1}{2}OD\cdot AC\cdot\sin\varphi = \frac{1}{2}AC(OB + OD)\cdot\sin\varphi =$$

$$= \frac{1}{2}AC\cdot BD\cdot\sin\varphi. \blacktriangleleft$$

Задача 3. Сторони трикутника дорівнюють 17 см, 65 см і 80 см. Знайдіть найменшу висоту трикутника, радіуси його вписаного й описаного кіл.

Розв'язання. Нехай $a = 17$ см, $b = 65$ см, $c = 80$ см.

Знайдемо півпериметр трикутника: $p = \frac{17 + 65 + 80}{2} = 81$ (см).

Площу трикутника обчислимо за формулою Герона:

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{81(81-17)(81-65)(81-80)} =$$

$$= \sqrt{81\cdot 64\cdot 16} = 9\cdot 8\cdot 4 = 288 \text{ (см}^2\text{)}.$$

Найменшою висотою трикутника є висота, проведена до його найбільшої сторони, довжина якої дорівнює c.

Оскільки $S = \frac{1}{2} ch_c$, то $h_c = \frac{2S}{c} = \frac{2 \cdot 288}{80} = 7{,}2$ (см).

Радіус вписаного кола $r = \frac{S}{p} = \frac{288}{81} = \frac{32}{9}$ (см).

Радіус описаного кола $R = \frac{abc}{4S} = \frac{17 \cdot 65 \cdot 80}{4 \cdot 288} = \frac{17 \cdot 65 \cdot 5}{4 \cdot 18} = \frac{5525}{72}$ (см).

Відповідь: 7,2 см, $\frac{32}{9}$ см, $\frac{5525}{72}$ см. ◄

?

1. Як можна знайти площу трикутника, якщо відомо дві його сторони та кут між ними?
2. Запишіть формулу Герона для обчислення площі трикутника.
3. Як можна обчислити площу трикутника зі сторонами a, b і c та радіусом R описаного кола?
4. Як можна знайти радіус описаного кола трикутника, якщо відомо площу трикутника та його сторони?
5. Як можна знайти площу трикутника, якщо відомо його півпериметр і радіус вписаного кола?
6. Як можна знайти радіус вписаного кола трикутника, якщо відомо площу трикутника та його сторони?
7. Чому дорівнює площа описаного многокутника?

ВПРАВИ

5.1.° Знайдіть площу трикутника ABC, якщо:
1) $AB = 12$ см, $AC = 9$ см, $\angle A = 30°$;
2) $AC = 3$ см, $BC = 6\sqrt{2}$ см, $\angle C = 135°$.

5.2.° Знайдіть площу трикутника DEF, якщо:
1) $DE = 7$ см, $DF = 8$ см, $\angle D = 60°$;
2) $DE = 10$ см, $EF = 6$ см, $\angle E = 150°$.

5.3.° Площа трикутника MKN дорівнює 75 см². Знайдіть сторону MK, якщо $KN = 15$ см, $\angle K = 30°$.

5.4.° Знайдіть кут між даними сторонами трикутника ABC, якщо:
1) $AB = 12$ см, $BC = 10$ см, площа трикутника дорівнює $30\sqrt{3}$ см^2;
2) $AB = 14$ см, $AC = 8$ см, площа трикутника дорівнює 56 см^2.

5.5.° Площа трикутника ABC дорівнює 18 см^2. Відомо, що $AC = 8$ см, $BC = 9$ см. Знайдіть кут C.

5.6.° Знайдіть площу рівнобедреного трикутника з бічною стороною 16 см і кутом 15° при основі.

5.7.° Знайдіть площу трикутника зі сторонами:
1) 13 см, 14 см, 15 см; 2) 2 см, 3 см, 4 см.

5.8.° Знайдіть площу трикутника зі сторонами:
1) 9 см, 10 см, 17 см; 2) 4 см, 5 см, 7 см.

5.9.° Знайдіть найменшу висоту трикутника зі сторонами 13 см, 20 см і 21 см.

5.10.° Знайдіть найбільшу висоту трикутника зі сторонами 11 см, 25 см і 30 см.

5.11.° Периметр трикутника дорівнює 32 см, а радіус вписаного кола — 1,5 см. Знайдіть площу трикутника.

5.12.° Площа трикутника дорівнює 84 см^2, а його периметр — 72 см. Знайдіть радіус вписаного кола трикутника.

5.13.° Знайдіть радіуси вписаного та описаного кіл трикутника зі сторонами:
1) 5 см, 5 см і 6 см; 2) 25 см, 29 см і 36 см.

5.14.° Знайдіть радіуси вписаного та описаного кіл трикутника зі сторонами 6 см, 25 см і 29 см.

5.15.° Знайдіть площу паралелограма за його сторонами a і b та кутом α між ними, якщо:
1) $a = 5\sqrt{2}$ см, $b = 9$ см, $\alpha = 45°$;
2) $a = 10$ см, $b = 18$ см, $\alpha = 150°$.

5.16.° Чому дорівнює площа паралелограма, сторони якого дорівнюють 7 см і 12 см, а один із кутів — 120°?

5.17.° Знайдіть площу ромба зі стороною $9\sqrt{3}$ см і кутом 60°.

5.18.° Діагоналі опуклого чотирикутника дорівнюють 8 см і 12 см, а кут між ними — 30°. Знайдіть площу чотирикутника.

5.19.° Знайдіть площу опуклого чотирикутника, діагоналі якого дорівнюють $3\sqrt{3}$ см і 4 см, а кут між ними — 60°.

5.20.° Знайдіть бічну сторону рівнобедреного трикутника, площа якого дорівнює 36 см^2, а кут при вершині — 30°.

5.21.• Який трикутник із двома даними сторонами має найбільшу площу?

5.22.• Чи може площа трикутника зі сторонами 4 см і 6 см дорівнювати:

1) 6 см²; 2) 14 см²; 3) 12 см²?

5.23.• Дві сусідні сторони паралелограма відповідно дорівнюють двом сусіднім сторонам прямокутника. Чому дорівнює гострий кут паралелограма, якщо його площа вдвічі менша від площі прямокутника?

5.24.• Знайдіть відношення площ S_1 і S_2 трикутників, зображених на рисунку 5.7 (довжини відрізків дано в сантиметрах).

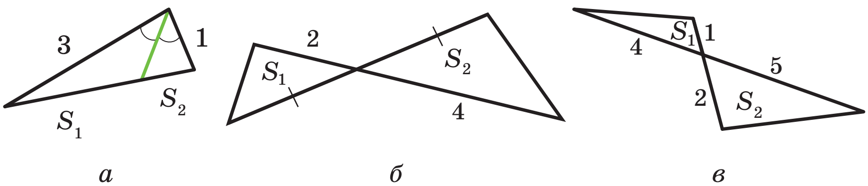


Рис. 5.7

5.25.• Відрізок AD — бісектриса трикутника ABC. Площа трикутника ABD дорівнює 12 см², а трикутника ACD — 20 см². Знайдіть відношення сторони AB до сторони AC.

5.26.• Знайдіть площу трикутника, сторона якого дорівнює a, а прилеглі до неї кути дорівнюють β і γ.

5.27.• Радіус кола, описаного навколо трикутника, дорівнює R, а два кути трикутника дорівнюють α і β. Знайдіть площу трикутника.

5.28.• У трикутнику ABC відомо, що $AC = b$, $\angle A = \alpha$, $\angle B = \beta$. Знайдіть площу трикутника.

5.29.• У трикутнику ABC кут A дорівнює α, а висоти BD і CE дорівнюють відповідно h_1 і h_2. Знайдіть площу трикутника ABC.

5.30.• Відрізок BM — висота трикутника ABC, $BM = h$, $\angle A = \alpha$, $\angle ABC = \beta$. Знайдіть площу трикутника ABC.

5.31.• У трикутник зі сторонами 17 см, 25 см і 28 см вписано коло, центр якого сполучено з вершинами трикутника. Знайдіть площі трикутників, які при цьому утворилися.

5.32.•• Відрізок AD — бісектриса трикутника ABC, $AB = 6$ см, $AC = 8$ см, $\angle BAC = 120°$. Знайдіть бісектрису AD.

5.33.•• Знайдіть площу трапеції, основи якої дорівнюють 10 см і 50 см, а бічні сторони — 13 см і 37 см.

5.34.•• Основи трапеції дорівнюють 4 см і 5 см, а діагоналі — 7 см і 8 см. Знайдіть площу трапеції.

5.35.•• Відрізки BM і CK — висоти гострокутного трикутника ABC, $\angle A = 45°$. Знайдіть відношення площ трикутників AMK і ABC.

5.36.•• Сторони трикутника дорівнюють 39 см, 41 см і 50 см. Знайдіть радіус кола, центр якого належить більшій стороні трикутника та яке дотикається до двох інших сторін.

5.37.•• Вершини трикутника сполучено із центром вписаного в нього кола. Проведені відрізки розбивають даний трикутник на трикутники, площі яких дорівнюють 26 см², 28 см² і 30 см². Знайдіть сторони даного трикутника.

5.38.•• Доведіть, що $\frac{1}{h_1}+\frac{1}{h_2}+\frac{1}{h_3}=\frac{1}{r}$, де h_1, h_2 і h_3 — довжини висот трикутника, r — радіус вписаного кола.

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

5.39. Перпендикуляр, проведений із вершини прямокутника до його діагоналі, ділить його кут у відношенні 4 : 5. Визначте кут між цим перпендикуляром і другою діагоналлю.

5.40. Середня лінія MK трапеції $ABCD$ $(BC \parallel AD)$ дорівнює 56 см. Через середину M сторони AB проведено пряму, яка паралельна стороні CD і перетинає основу AD у точці E так, що $AE : ED = 5 : 8$. Знайдіть основи трапеції.

5.41. Відрізок CD — бісектриса трикутника ABC. Через точку D проведено пряму, яка паралельна прямій AC і перетинає сторону BC у точці E. Знайдіть відрізок DE, якщо $AC = 16$ см, $BC = 24$ см.

ГОТУЄМОСЯ ДО ВИВЧЕННЯ НОВОЇ ТЕМИ

5.42. Знайдіть суму кутів опуклого семикутника.

5.43. Чи існує опуклий многокутник, сума кутів якого дорівнює:
1) 1080°; 2) 1200°?

5.44. Чи існує многокутник, кожний кут якого дорівнює:
1) 72°; 2) 171°?

5.45. Чи є правильним твердження (відповідь обґрунтуйте):
1) якщо всі сторони многокутника, вписаного в коло, рівні, то й усі його кути теж рівні;
2) якщо всі кути многокутника, вписаного в коло, рівні, то й усі його сторони теж рівні;
3) якщо всі сторони многокутника, описаного навколо кола, рівні, то й усі його кути теж рівні;
4) якщо всі кути многокутника, описаного навколо кола, рівні, то й усі його сторони теж рівні?

СПОСТЕРІГАЙТЕ, РИСУЙТЕ, КОНСТРУЮЙТЕ, ФАНТАЗУЙТЕ

5.46. Дано квадрат розміром 99×99 клітинок. Кожну клітинку квадрата пофарбовано в чорний або в білий колір. Дозволяється одночасно перефарбувати всі клітинки деякого стовпця або деякого рядка в той колір, клітинок якого в цьому стовпці або в цьому рядку до перефарбовування було найбільше. Чи завжди можна добитися того, щоб усі клітинки квадрата стали однакового кольору?

ЗОВНІВПИСАНЕ КОЛО ТРИКУТНИКА

Проведемо бісектриси двох зовнішніх кутів із вершинами A і C трикутника ABC (рис. 5.8). Нехай O — точка перетину цих бісектрис. Тоді точка O рівновіддалена від прямих AB, BC і AC.

Проведемо три перпендикуляри: $OM \perp AB$, $OK \perp AC$, $ON \perp BC$. Зрозуміло, що $OM = OK = ON$. Отже, існує коло із центром у точці O, яке дотикається до сторони трикутника та продовжень двох інших його сторін. Таке коло називають **зовнівписаним** колом трикутника ABC (рис. 5.8).

Оскільки $OM = ON$, то точка O належить бісектрисі кута ABC.

Будь-який трикутник має три зовнівписаних кола. На рисунку 5.9 їхні центри позначено O_A, O_B і O_C. Радіуси цих кіл позначимо відповідно r_a, r_b і r_c.

За властивістю дотичних, проведених до кола через одну точку, маємо: $CK = CN$, $AK = AM$ (рис. 5.8). Тоді $AC = CN + AM$. Отже, периметр трикутника ABC дорівнює сумі $BM + BN$. Але $BM = BN$. Тоді $BM = BN = p$, де p — півпериметр трикутника ABC.

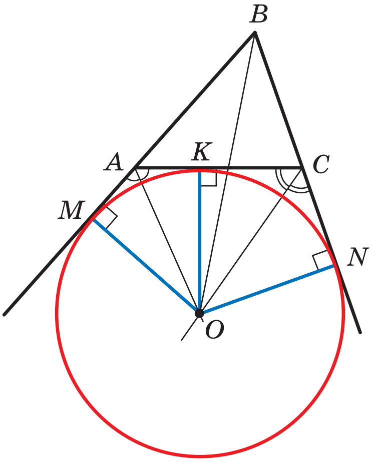


Рис. 5.8

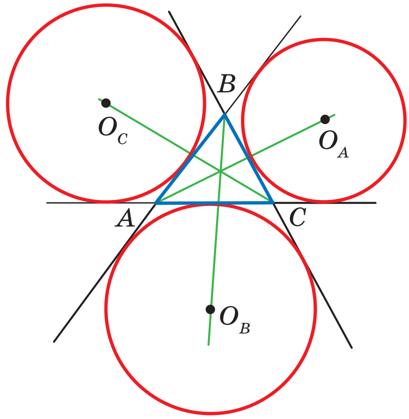


Рис. 5.9

Маємо:

$$S_{ABC} = S_{OAB} + S_{OCB} - S_{OAC} = \frac{1}{2}OM \cdot AB + \frac{1}{2}ON \cdot BC - \frac{1}{2}OK \cdot AC =$$

$$= \frac{1}{2}r_b\,(c + a - b) = r_b \cdot \frac{a + b + c - 2b}{2} = r_b \cdot \frac{2p - 2b}{2} = r_b\,(p - b).$$

Звідси $r_b = \dfrac{S}{p-b}$, де S — площа трикутника ABC.

Аналогічно можна показати, що $r_a = \dfrac{S}{p-a}$, $r_c = \dfrac{S}{p-c}$.

ВПРАВИ

1. Доведіть, що $\dfrac{1}{r} = \dfrac{1}{r_a} + \dfrac{1}{r_b} + \dfrac{1}{r_c}$, де r — радіус вписаного кола трикутника ABC.

2. Доведіть, що площу S прямокутного трикутника можна обчислити за формулою $S = r_c \cdot r$, де r_c — радіус зовнівписаного кола, яке дотикається до гіпотенузи трикутника, r — радіус вписаного кола даного трикутника.

3. У рівносторонній трикутник зі стороною a вписано коло. До кола проведено дотичну так, що відрізок дотичної, який належить трикутнику, дорівнює b. Знайдіть площу трикутника, який ця дотична відтинає від рівностороннього трикутника.

4. У чотирикутнику $ABCD$ діагональ BD перпендикулярна до сторони AD, $\angle ADC = 135°$, $\angle BAD = \angle BCD = 60°$. Доведіть, що діагональ AC є бісектрисою кута BAD.
Вказівка. Доведіть, що точка C — центр зовнівписаного кола трикутника ABD.

5. У трикутнику ABC кут B дорівнює $120°$. Відрізки AN, CF і BK є бісектрисами трикутника ABC. Доведіть, що кут NKF дорівнює $90°$.
Вказівка. На продовженні сторони AB за точку B позначимо точку M. Тоді $\angle MBC = \angle KBC = 60°$, тобто промінь BC — бісектриса зовнішнього кута MBK трикутника ABK. Звідси випливає, що точка N — центр зовнівписаного кола трикутника ABK. Аналогічно можна довести, що точка F — центр зовнівписаного кола трикутника BCK.

6. Сторона квадрата $ABCD$ дорівнює 1 см. На сторонах AB і BC позначили точки M і N відповідно так, що периметр трикутника MBN дорівнює 2 см. Знайдіть кут MDN.
Вказівка. Доведіть, що точка D — центр зовнівписаного кола трикутника MBN.

ЗАВДАННЯ № 1 «ПЕРЕВІРТЕ СЕБЕ» В ТЕСТОВІЙ ФОРМІ

1. Яка з рівностей є правильною?
А) $\cos(180° - \alpha) = \sin\alpha$;
Б) $\cos(180° - \alpha) = \cos\alpha$;
В) $\sin(180° - \alpha) = \cos\alpha$;
Г) $\sin(180° - \alpha) = \sin\alpha$.

2. Яка з нерівностей є правильною?
А) $\sin 100° \cos 110° > 0$;
Б) $\sin 100° \cos 10° < 0$;
В) $\sin 100° \cos 110° < 0$;
Г) $\sin 100° \cos 90° > 0$.

3. Знайдіть третю сторону трикутника, якщо дві його сторони дорівнюють 3 см і 8 см, а кут між ними дорівнює 120°.
А) $\sqrt{97}$ см; Б) 7 см; В) 9 см; Г) $\sqrt{32}$ см.

4. Яким є кут, що лежить проти більшої сторони трикутника зі сторонами 4 см, 7 см і 9 см?
А) Гострим;
Б) тупим;
В) прямим;
Г) установити неможливо.

5. Кут між двома сторонами трикутника, одна з яких на 10 см більша за другу, дорівнює 60°, а третя сторона дорівнює 14 см. Яка довжина найбільшої сторони трикутника?
А) 16 см; Б) 14 см; В) 18 см; Г) 15 см.

6. Діагоналі паралелограма дорівнюють 17 см і 19 см, а його сторони відносяться як 2 : 3. Чому дорівнює периметр паралелограма?
А) 25 см; Б) 30 см; В) 40 см; Г) 50 см.

7. У трикутнику ABC відомо, що $AB = 8$ см, $\angle C = 30°$, $\angle A = 45°$. Знайдіть сторону BC.
А) $8\sqrt{2}$ см; Б) $4\sqrt{2}$ см; В) $16\sqrt{2}$ см; Г) $12\sqrt{2}$ см.

8. Чому дорівнює відношення $AC : BC$ сторін трикутника ABC, якщо $\angle A = 120°$, $\angle B = 30°$?
А) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; Б) $\sqrt{3}$; В) $\frac{\sqrt{3}}{3}$; Г) $\frac{2}{\sqrt{3}}$.

9. У трикутнику ABC відомо, що $AB = 4\sqrt{2}$ см, $\angle C = 135°$. Знайдіть діаметр кола, описаного навколо трикутника.

А) 4 см; Б) 8 см; В) 16 см; Г) 2 см.

10. Якого найбільшого значення може набувати площа трикутника зі сторонами 8 см і 12 см?

А) 96 см^2;
Б) 48 см^2;
В) 24 см^2;
Г) установити неможливо.

11. Знайдіть суму радіусів вписаного та описаного кіл трикутника зі сторонами 25 см, 33 см і 52 см.

А) 36 см; Б) 30 см; В) 32,5 см; Г) 38,5 см.

12. Дві сторони трикутника дорівнюють 11 см і 23 см, а медіана, проведена до третьої сторони, — 10 см. Знайдіть невідому сторону трикутника.

А) 15 см; Б) 30 см; В) 25 см; Г) 20 см.

ГОЛОВНЕ В ПАРАГРАФІ 1

Косинус і синус

Косинусом і синусом кута α $(0^\circ \leqslant \alpha \leqslant 180^\circ)$, якому відповідає точка M одиничного півкола, називають відповідно абсцису й ординату точки M.

Тангенс

Тангенсом кута α, де $0^\circ \leqslant \alpha \leqslant 180^\circ$ і $\alpha \neq 90^\circ$, називають відношення $\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$.

Теорема косинусів

Квадрат сторони трикутника дорівнює сумі квадратів двох інших сторін мінус подвоєний добуток цих сторін і косинуса кута між ними:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha.$$

Наслідок з теореми косинусів

Нехай a, b і c — довжини сторін трикутника, причому a — довжина його найбільшої сторони. Якщо $a^2 < b^2 + c^2$, то трикутник є гострокутним. Якщо $a^2 > b^2 + c^2$, то трикутник є тупокутним. Якщо $a^2 = b^2 + c^2$, то трикутник є прямокутним.

Лема про хорду кола

Хорда кола дорівнює добутку діаметра та синуса будь-якого вписаного кута, який спирається на цю хорду.

Теорема синусів

Сторони трикутника пропорційні синусам протилежних кутів:

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}.$$

Формули для знаходження площі трикутника

$$S = \frac{1}{2}ab \sin \gamma$$

Формула Герона: $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

$$S = \frac{abc}{4R}$$

$$S = pr$$

Формула для знаходження радіуса кола, вписаного в трикутник

$$r = \frac{S}{p}$$

Формули для знаходження радіуса кола, описаного навколо трикутника

$$R = \frac{a}{2\sin\alpha}$$

$$R = \frac{abc}{4S}$$

Площа многокутника, описаного навколо кола

Площа многокутника, описаного навколо кола, дорівнює добутку його півпериметра та радіуса вписаного кола.

ПРАВИЛЬНІ МНОГОКУТНИКИ §2

У цьому параграфі ви дізнаєтесь, які многокутники називають правильними. Вивчите властивості правильних многокутників. Дізнаєтеся, як за допомогою циркуля та лінійки будувати деякі з них.

Навчитеся знаходити радіуси вписаного й описаного кіл правильного многокутника, довжину дуги кола, площі сектора та сегмента круга.

6. Правильні многокутники та їхні властивості

Означення. Многокутник називають правильним, якщо в нього всі сторони рівні та всі кути рівні.

З деякими правильними многокутниками ви вже знайомі: рівносторонній трикутник — це правильний трикутник, квадрат — це правильний чотирикутник. На рисунку 6.1 зображено правильні п’ятикутник і восьмикутник.

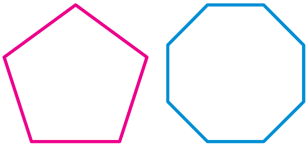


Рис. 6.1

Ознайомимося з деякими властивостями, що притаманні всім правильним n-кутникам.

Теорема 6.1. ***Правильний многокутник є опуклим многокутником.***

Із доведенням цієї теореми ви можете ознайомитися на с. 60–61.

Кожний кут правильного n-кутника дорівнює $\frac{180° (n-2)}{n}$. Справді, оскільки сума кутів опуклого n-кутника дорівнює $180° (n-2)$ і всі кути рівні, то кожний із них дорівнює $\frac{180° (n-2)}{n}$.

У правильному трикутнику є точка, рівновіддалена від усіх його вершин і від усіх його сторін. Це точка перетину бісектрис правильного трикутника. Точці перетину діагоналей квадрата теж притаманна аналогічна властивість. Те, що в будь-якому правильному многокутнику є точка, рівновіддалена як від усіх його вершин, так і від усіх його сторін, підтверджує така теорема.

Теорема 6.2. ***Будь-який правильний многокутник є як вписаним у коло, так і описаним навколо кола, причому центри описаного та вписаного кіл збігаються.***

Доведення. На рисунку 6.2 зображено правильний n-кутник $A_1A_2A_3...A_n$. Доведемо, що в нього можна вписати й навколо нього можна описати кола.

Проведемо бісектриси кутів A_1 і A_2. Нехай O — точка їхнього перетину. Сполучимо точки O і A_3. Оскільки в трикутниках OA_1A_2 і OA_2A_3 кути 2 і 3 рівні, $A_1A_2 = A_2A_3$ і OA_2 — спільна сторона, то ці трикутники рівні за першою ознакою рівності трикутників. Крім того, кути 1 і 2 рівні як половини рівних кутів. Звідси трикутник OA_1A_2 — рівнобедрений, отже, рівнобедреним є трикутник OA_2A_3. Тому $OA_1 = OA_2 = OA_3$.

Сполучаючи точку O з вершинами $A_4, A_5, ..., A_{n-1}, A_n$, аналогічно можна показати, що $OA_3 = OA_4 = ... = OA_{n-1} = OA_n$.

Таким чином, для многокутника $A_1A_2A_3...A_n$ існує точка, рівновіддалена від усіх його вершин. Це точка O — центр описаного кола.

Оскільки рівнобедрені трикутники OA_1A_2, OA_2A_3, OA_3A_4, ..., $OA_{n-1}A_n$, OA_nA_1 рівні, то рівні і їхні висоти, проведені з вершини O. Звідси робимо висновок: точка O рівновіддалена від усіх сторін многокутника. Отже, точка O — центр вписаного кола. ◄

Точку, яка є центром описаного та вписаного кіл правильного многокутника, називають **центром правильного многокутника**.

На рисунку 6.3 зображено фрагмент правильного n-кутника із центром O та стороною AB, довжину якої позначимо a_n. Кут AOB

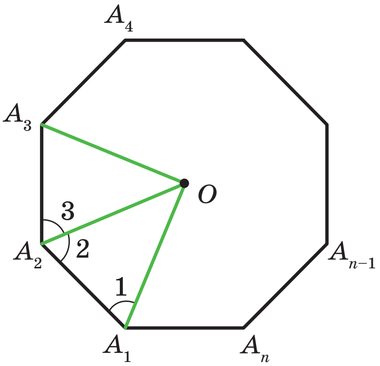


Рис. 6.2

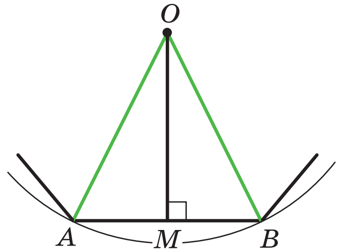


Рис. 6.3

називають **центральним кутом правильного многокутника**. Зрозуміло, що $\angle AOB = \dfrac{360^\circ}{n}$.

У рівнобедреному трикутнику AOB проведемо висоту OM. Тоді $\angle AOM = \angle BOM = \dfrac{180^\circ}{n}$, $AM = MB = \dfrac{a_n}{2}$. Із трикутника OMB отримуємо, що $OB = \dfrac{MB}{\sin \angle BOM} = \dfrac{a_n}{2 \sin \dfrac{180^\circ}{n}}$ і $OM = \dfrac{MB}{\operatorname{tg} \angle BOM} = \dfrac{a_n}{2 \operatorname{tg} \dfrac{180^\circ}{n}}$.

Відрізки OB і OM — радіуси відповідно описаного та вписаного кіл правильного n-кутника. Якщо їхні довжини позначити R_n і r_n відповідно, то отримані результати можна записати у вигляді формул:

$$\boxed{R_n = \dfrac{a_n}{2 \sin \dfrac{180^\circ}{n}}} \qquad \boxed{r_n = \dfrac{a_n}{2 \operatorname{tg} \dfrac{180^\circ}{n}}}$$

Підставивши у ці формули замість n числа 3, 4, 6, отримаємо формули для знаходження радіусів описаного та вписаного кіл для правильних трикутника, чотирикутника й шестикутника зі стороною a:

Кількість сторін правильного n-кутника	$n = 3$	$n = 4$	$n = 6$
Радіус описаного кола	$R_3 = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$	$R_4 = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$	$R_6 = a$
Радіус вписаного кола	$r_3 = \dfrac{a\sqrt{3}}{6}$	$r_4 = \dfrac{a}{2}$	$r_6 = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$

З отриманих результатів випливає, що сторона правильного шестикутника дорівнює радіусу його описаного кола. Тепер можна записати алгоритм побудови правильного шестикутника: від довільної точки M кола потрібно послідовно відкладати хорди, які дорівнюють радіусу (рис. 6.4). Таким чином отримуємо вершини правильного шестикутника.

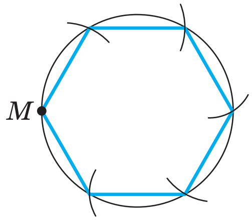


Рис. 6.4

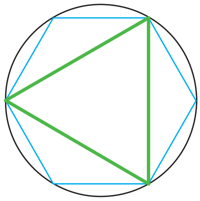


Рис. 6.5

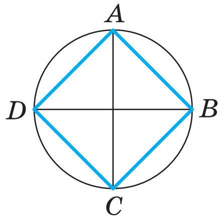


Рис. 6.6

Сполучивши через одну вершини правильного шестикутника, отримаємо правильний трикутник (рис. 6.5).

Для побудови правильного чотирикутника достатньо в колі провести два перпендикулярних діаметри AC і BD (рис. 6.6). Тоді чотирикутник $ABCD$ — квадрат (доведіть це самостійно).

Якщо побудовано правильний n-кутник, то легко побудувати правильний $2n$-кутник. Для цього потрібно знайти середини всіх сторін n-кутника та провести радіуси описаного кола через отримані точки. Тоді кінці радіусів і вершини даного n-кутника будуть вершинами правильного $2n$-кутника. На рисунках 6.7 і 6.8 показано побудову правильних 8-кутника та 12-кутника.

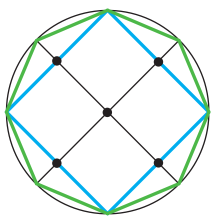


Рис. 6.7

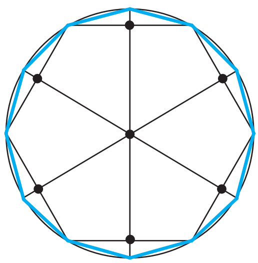


Рис. 6.8

Задача 1. Чи існує правильний многокутник, кут якого дорівнює: 1) 155°; 2) 177°? У разі ствердної відповіді вкажіть вид многокутника.

1) Нехай n — кількість сторін шуканого правильного многокутника. З одного боку, сума його кутів дорівнює $180°(n - 2)$. З другого боку, ця сума дорівнює $155°n$. Отже, $180°(n - 2) = 155°n$; $25°n = 360°$; $n = 14{,}4$. Оскільки n має бути натуральним числом, то такого правильного многокутника не існує.

2) Маємо: $180°(n-2)=177°n$; $180°n-360°=177°n$; $n=120$.

Відповідь: 1) не існує; 2) існує, це — стодвадцятикутник. ◄

Задача 2. У коло вписано правильний трикутник зі стороною 18 см. Знайдіть сторону правильного шестикутника, описаного навколо цього кола.

Розв'язання. Радіус кола, описаного навколо правильного трикутника, обчислюють за формулою $R_3=\frac{a\sqrt{3}}{3}$, де a — довжина сторони трикутника (рис. 6.9). Отже, $R_3=\frac{18\sqrt{3}}{3}=6\sqrt{3}$ (см).

За умовою радіус кола, вписаного в правильний шестикутник, дорівнює радіусу кола, описаного навколо правильного трикутника, тобто $r_6=R_3=6\sqrt{3}$ см. Оскільки $r_6=\frac{b\sqrt{3}}{2}$, де b — довжина сторони правильного шестикутника, то $b=\frac{2r_6}{\sqrt{3}}=\frac{2\cdot 6\sqrt{3}}{\sqrt{3}}=12$ (см).

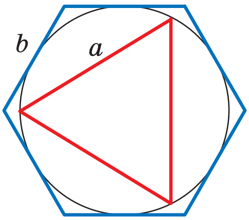


Рис. 6.9

Відповідь: 12 см. ◄

1. Який многокутник називають правильним?
2. Яку іншу назву має правильний трикутник?
3. Яку іншу назву має правильний чотирикутник?
4. Навколо якого правильного многокутника можна описати коло?
5. У який правильний многокутник можна вписати коло?
6. Як розташовані один відносно одного центри вписаного та описаного кіл правильного многокутника?
7. Що називають центром правильного многокутника?
8. Запишіть формули радіусів вписаного та описаного кіл правильного n-кутника, трикутника, чотирикутника, шестикутника.
9. Опишіть побудову правильного шестикутника.
10. Опишіть побудову правильного чотирикутника.
11. Як, маючи побудований правильний n-кутник, можна побудувати правильний $2n$-кутник?

ПРАКТИЧНІ ЗАВДАННЯ

6.1.° Накресліть коло, радіус якого дорівнює 3 см. Побудуйте вписаний у це коло:
1) правильний шестикутник;
2) правильний трикутник;
3) правильний дванадцятикутник.

6.2.° Накресліть коло, радіус якого дорівнює 2,5 см. Побудуйте вписаний у це коло: 1) правильний чотирикутник; 2) правильний восьмикутник.

ВПРАВИ

6.3.° Знайдіть кути правильного n-кутника, якщо:
1) $n = 6$; 2) $n = 9$; 3) $n = 15$.

6.4.° Знайдіть кути правильного:
1) восьмикутника; 2) десятикутника.

6.5.° Скільки сторін має правильний многокутник, кут якого дорівнює:
1) 160°; 2) 171°?

6.6.° Скільки сторін має правильний многокутник, кут якого дорівнює:
1) 108°; 2) 175°?

6.7.° Чи існує правильний многокутник, кут якого дорівнює:
1) 140°; 2) 130°?

6.8.° Скільки сторін має правильний многокутник, якщо кут, суміжний із кутом многокутника, становить $\frac{1}{9}$ кута многокутника?

6.9.° Визначте кількість сторін правильного многокутника, якщо його кут на 168° більший за суміжний із ним кут.

6.10.° Скільки сторін має правильний многокутник, вписаний у коло, якщо градусна міра дуги описаного кола, яку стягує сторона многокутника, дорівнює:
1) 90°; 2) 24°?

6.11.° Знайдіть кількість сторін правильного многокутника, центральний кут якого дорівнює:
1) 120°; 2) 72°.

6.12.° Нехай a — довжина сторони правильного трикутника, R і r — відповідно радіуси його описаного та вписаного кіл. Заповніть таблицю (довжини відрізків дано в сантиметрах):

a	R	r
$6\sqrt{3}$		
	$4\sqrt{3}$	
		2

6.13.° Нехай a — довжина сторони квадрата, R і r — відповідно радіуси його описаного та вписаного кіл. Заповніть таблицю (довжини відрізків дано в сантиметрах):

a	R	r
8		
	4	
		$\sqrt{2}$

6.14.° Висота правильного трикутника дорівнює 15 см. Чому дорівнює радіус:

1) описаного кола; 2) вписаного кола?

6.15.° Діагональ квадрата дорівнює $6\sqrt{2}$ см. Чому дорівнює радіус:

1) описаного кола; 2) вписаного кола?

6.16.° Радіус кола дорівнює 12 см. Знайдіть сторону вписаного в це коло правильного:

1) шестикутника; 2) дванадцятикутника.

6.17.° Радіус кола дорівнює $8\sqrt{3}$ см. Знайдіть сторону описаного навколо цього кола правильного шестикутника.

6.18.° Доведіть, що радіус кола, описаного навколо правильного трикутника, удвічі більший за радіус кола, яке вписане в цей трикутник.

6.19.° Радіус кола, описаного навколо правильного трикутника, на 4 см більший за радіус вписаного кола. Знайдіть радіуси вписаного й описаного кіл та сторону трикутника.

6.20.° Сторона правильного многокутника дорівнює a, радіус описаного кола дорівнює R. Знайдіть радіус вписаного кола.

6.21.° Радіуси вписаного й описаного кіл правильного многокутника дорівнюють відповідно r і R. Знайдіть сторону многокутника.

6.22.° Сторона правильного многокутника дорівнює a, радіус вписаного кола дорівнює r. Знайдіть радіус описаного кола.

6.23.° Навколо кола описано правильний шестикутник зі стороною $4\sqrt{3}$ см. Знайдіть сторону квадрата, вписаного в це коло.

6.24.° У коло вписано квадрат зі стороною $6\sqrt{2}$ см. Знайдіть сторону правильного трикутника, описаного навколо цього кола.

6.25.° Діаметр круга дорівнює 16 см. Чи можна з нього вирізати квадрат зі стороною 12 см?

6.26.° Яким має бути найменший діаметр круглої колоди, щоб із неї можна було виготовити брус, поперечним перерізом якого є правильний трикутник зі стороною 15 см?

6.27.° Яким має бути найменший діаметр круглої колоди, щоб із неї можна було виготовити брус, поперечним перерізом якого є квадрат зі стороною 14 см?

6.28.• Скільки сторін має правильний многокутник, кут якого на 36° більший за його центральний кут?

6.29.• Кут між радіусами вписаного кола правильного многокутника, проведеними в точки дотику цього кола до сусідніх сторін многокутника, дорівнює 20°. Знайдіть кількість сторін многокутника.

6.30.• Доведіть, що всі діагоналі правильного п'ятикутника рівні.

6.31.• Доведіть, що кожна діагональ правильного п'ятикутника паралельна одній із його сторін.

6.32.• Спільна хорда двох кіл, що перетинаються, є стороною правильного трикутника, вписаного в одне коло, і стороною квадрата, вписаного в друге коло. Довжина цієї хорди дорівнює a. Знайдіть відстань між центрами кіл, якщо вони лежать:
1) по різні боки від хорди; 2) по один бік від хорди.

6.33.• Спільна хорда двох кіл, що перетинаються, є стороною правильного трикутника, вписаного в одне коло, і стороною правильного шестикутника, вписаного в друге коло. Довжина цієї хорди дорівнює a. Знайдіть відстань між центрами кіл, якщо вони лежать:
1) по різні боки від хорди; 2) по один бік від хорди.

6.34.• У коло вписано правильний трикутник і навколо нього описано правильний трикутник. Знайдіть відношення сторін цих трикутників.

6.35.• У коло вписано правильний шестикутник і навколо нього описано правильний шестикутник. Знайдіть відношення сторін цих шестикутників.

6.36.• Доведіть, що сторона правильного восьмикутника дорівнює $R\sqrt{2-\sqrt{2}}$, де R — радіус його описаного кола.

6.37.• Доведіть, що сторона правильного дванадцятикутника дорівнює $R\sqrt{2-\sqrt{3}}$, де R — радіус його описаного кола.

6.38.• Який розмір отвору ключа для шестигранної гайки, основи якої мають форму правильного шестикутника (рис. 6.10), якщо ширина грані гайки дорівнює 25 мм, а зазор між гранями гайки й ключа — 0,5 мм?

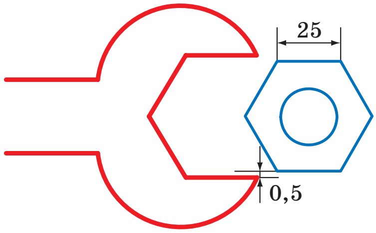


Рис. 6.10

6.39.• Знайдіть площу правильного восьмикутника, якщо радіус описаного навколо нього кола дорівнює R.

6.40.• Знайдіть діагоналі та площу правильного шестикутника, сторона якого дорівнює a.

6.41.•• Кути квадрата зі стороною 6 см зрізали так, що отримали правильний восьмикутник. Знайдіть сторону утвореного восьмикутника.

6.42.•• Кути правильного трикутника зі стороною 24 см зрізали так, що отримали правильний шестикутник. Знайдіть сторону утвореного шестикутника.

6.43.•• Знайдіть діагоналі правильного восьмикутника, сторона якого дорівнює a.

6.44.•• У правильному дванадцятикутнику, сторона якого дорівнює a, послідовно сполучили середини шести сторін, узятих через одну. Знайдіть сторону правильного шестикутника, який утворився при цьому.

6.45.•• У правильному восьмикутнику, сторона якого дорівнює a, послідовно сполучили середини чотирьох сторін, узятих через одну. Знайдіть сторону квадрата, який утворився при цьому.

6.46.* Форму яких рівних правильних многокутників можуть мати дощечки паркету, щоб ними можна було вистелити підлогу?

6.47.* Дано правильний шестикутник, сторона якого дорівнює 1 см. Користуючись тільки лінійкою, побудуйте відрізок завдовжки $\sqrt{7}$ см.

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

6.48. Коло поділено на 5 рівних дуг: $\cup AB = \cup BC = \cup CD = \cup DE = \cup AE$. Знайдіть:
1) $\angle BAC$; 2) $\angle BAD$; 3) $\angle BAE$; 4) $\angle CAD$; 5) $\angle DAE$.

6.49. На одній стороні кута з вершиною в точці A позначили точки B і C (точка B лежить між точками A і C), а на другій — точки D і E (точка D лежить між точками A і E), причому $AB = 28$ см, $BC = 8$ см, $AD = 24$ см, $AE = 42$ см, $BE = 21$ см. Знайдіть відрізок CD.

6.50. Основа рівнобедреного тупокутного трикутника дорівнює 24 см, а радіус кола, описаного навколо нього, — 13 см. Знайдіть площу трикутника.

6.51. Через точку A до кола проведено дві дотичні. Відстань від точки A до точки дотику дорівнює 12 см, а відстань між точками дотику — 14,4 см. Знайдіть радіус кола.

ПРО ПОБУДОВУ ПРАВИЛЬНИХ n-КУТНИКІВ

Доведемо, що будь-який правильний n-кутник є опуклим многокутником. Для цього достатньо показати, що в будь-якому многокутнику є хоча б один кут, менший від 180°. Тоді з того, що в правильному n-кутнику всі кути рівні, випливатиме, що всі вони менші від 180°, тобто многокутник буде опуклим.

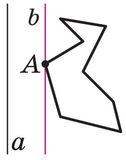


Рис. 6.11

Розглянемо довільний многокутник і пряму a, яка не має з ним спільних точок (рис. 6.11). Із кожної вершини многокутника опустимо перпендикуляр на пряму a.

Порівнявши довжини цих перпендикулярів, ми зможемо вибрати вершину многокутника, яка найменше віддалена від прямої a (якщо таких вершин кілька, то виберемо будь-яку з них). Нехай цю властивість має вершина A (рис. 6.11). Через точку A проведемо пряму b, паралельну прямій a. Тоді кут A многокутника лежить в одній півплощині відносно прямої b. Отже, $\angle A < 180°$.

Ви вмієте за допомогою циркуля та лінійки будувати правильний 4-кутник, а отже, і 8-кутник, 16-кутник, 32-кутник, тобто будь-який 2^n-кутник (n — натуральне число, $n > 1$). Уміння побудувати правильний трикутник дає можливість побудувати такий ланцюжок із правильних многокутників: 6-кутник, 12-кутник, 24-кутник і т. д., тобто будь-який $3 \cdot 2^n$-кутник (n — натуральне число).

Задачу побудови правильних многокутників за допомогою циркуля та лінійки вивчали ще давньогрецькі геометри. Зокрема, крім зазначених вище многокутників, вони вміли будувати правильні 5-кутник і 15-кутник, що є досить непростою справою.

Стародавні вчені, які вміли будувати будь-який із правильних n-кутників, де $n = 3, 4, 5, 6, 8, 10$, намагалися розв'язати цю задачу і для $n = 7, 9$. Їм це не вдалося. Узагалі, більше двох тисяч років математики не могли зрушитися з місця у вирішенні цієї проблеми. У 1796 р. великий німецький математик Карл Фрідріх Гаусс зміг за допомогою циркуля та лінійки побудувати правильний 17-кутник. У 1801 р. Гаусс довів, що циркулем та лінійкою можна побудувати правильний n-кутник тоді й тільки тоді, коли $n = 2^k$, де $k \in \mathbb{N}$, $k > 1$, або $n = 2^k \cdot p_1 p_2 \cdot \ldots \cdot p_t$, де k — ціле невід'ємне число, $p_1, p_2, \ldots, p_t$ — різні прості числа виду $2^{2^m} + 1$, де m — ціле невід'ємне число, які називають простими числами Ферма[1]. Зараз відомо лише п'ять простих чисел Ферма: 3, 5, 17, 257, 65 537.

Карл Фрідріх Гаусс
(1777–1855)

Гаусс надавав своєму відкриттю настільки великого значення, що заповів зобразити 17-кутник на своєму надгробку. На могильній плиті Гаусса цього рисунка немає, проте пам'ятник Гауссу в Брауншвейзі стоїть на сімнадцятикутному постаменті.

---

[1] П'єр Ферма (1601–1665) — французький математик, один із фундаторів теорії чисел.

7. Довжина кола. Площа круга

На рисунку 7.1 зображено правильні 4-кутник, 8-кутник і 16-кутник, вписані в коло.

Ми бачимо, що при збільшенні кількості сторін правильного n-кутника його периметр P_n усе менше й менше відрізняється від довжини C описаного кола.

Так, для нашого прикладу можна записати:

$$C - P_4 > C - P_8 > C - P_{16}.$$

При необмеженому збільшенні кількості сторін правильного многокутника його периметр буде як завгодно мало відрізнятися від довжини кола. Це означає, що різницю $C - P_n$ можна зробити меншою від, наприклад, 10^{-6}, 10^{-9} і взагалі меншою від будь-якого додатного числа.

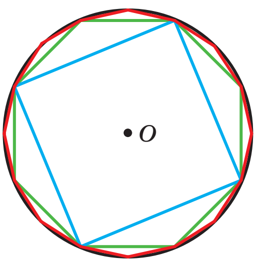


Рис. 7.1

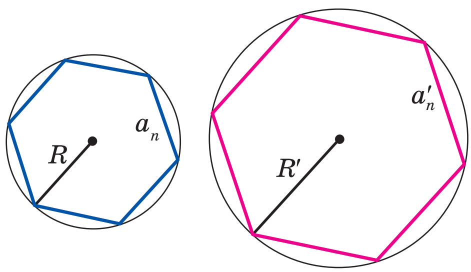


Рис. 7.2

Розглянемо два правильних n-кутники зі сторонами a_n і a'_n, вписаних у кола, радіуси яких дорівнюють R і R' відповідно (рис. 7.2). Тоді їхні периметри P_n і P'_n можна обчислити за формулами

$$P_n = na_n = n \cdot 2R \sin \frac{180^\circ}{n},$$

$$P'_n = na'_n = n \cdot 2R' \sin \frac{180^\circ}{n}.$$

Звідси

$$\frac{P_n}{P'_n} = \frac{2R}{2R'}. \qquad (*)$$

Ця рівність справедлива при будь-якому значенні n (n — натуральне число, $n \geqslant 3$). При необмеженому збільшенні значення n периметри P_n и P'_n відповідно будуть як завгодно мало відрізнятися від довжин C і C' описаних кіл. Тоді при необмеженому збільшенні n відношення $\frac{P_n}{P'_n}$ буде як завгодно мало відрізнятися від відношення $\frac{C}{C'}$. З урахуванням рівності (*) доходимо висновку, що число $\frac{2R}{2R'}$ як завгодно мало відрізняється від числа $\frac{C}{C'}$. А це можливо лише тоді, коли $\frac{C}{C'} = \frac{2R}{2R'}$, тобто $\frac{C}{2R} = \frac{C'}{2R'}$.

Остання рівність означає, що ***для всіх кіл відношення довжини кола до діаметра є одним і тим самим числом***.

Із курсу математики 6 класу ви знаєте, що це число прийнято позначати грецькою буквою π (читають: «пі»).

З рівності $\frac{C}{2R} = \pi$ отримуємо формулу для обчислення довжини кола:

$$\boxed{\boldsymbol{C = 2\pi R}}$$

Число π є ірраціональним, отже, його не можна подати у вигляді скінченного десяткового дробу. Зазвичай при розв'язуванні задач за наближене значення π приймають число 3,14.

Видатний давньогрецький учений Архімед (III ст. до н. е.), виразивши через діаметр описаного кола периметр правильного 96-кутника, установив, що $3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7}$. Звідси й випливає, що $\pi \approx 3{,}14$.

За допомогою сучасних комп'ютерів і спеціальних програм можна обчислити число π з величезною точністю. Наведемо запис числа π з 47 цифрами після коми:

$\pi = 3{,}14159265358979323846264338327950288419716939937\ldots$.

У 1989 р. число π обчислили з точністю до 1 011 196 691 цифри після коми. Цей факт було занесено до Книги рекордів Гіннеса. Саме число в книзі не наведено, оскільки для цього потрібно було б понад тисячу сторінок. У 2017 р. уже було обчислено більше ніж 22 трильйони знаків числа π.

Знайдемо формулу для обчислення довжини дуги кола з градусною мірою $n°$. Оскільки градусна міра всього кола дорівнює 360°, то довжина дуги в 1° дорівнює $\frac{2\pi R}{360} = \frac{\pi R}{180}$. Тоді довжину l дуги в $n°$ обчислюють за формулою

$$\boxed{\boldsymbol{l = \frac{\pi R n}{180}}}$$

Виведемо формулу для обчислення площі круга.

Звернемося знову до рисунка 7.1. Бачимо, що при збільшенні кількості сторін правильного n-кутника його площа S_n усе менше й менше відрізняється від площі S круга. При необмеженому збільшенні кількості сторін його площа наближається до площі круга.

На рисунку 7.3 зображено фрагмент правильного n-кутника із центром у точці O, зі стороною $AB = a_n$ і радіусом описаного кола, який дорівнює R. Опустимо перпендикуляр OM на сторону AB. Маємо: $S_{AOB} = \frac{1}{2} AB \cdot OM = \frac{1}{2} a_n \cdot R \cos \frac{180°}{n}$.

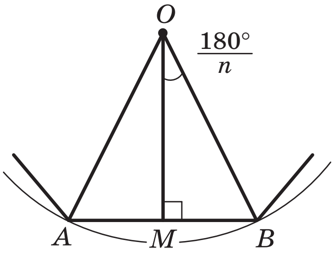


Рис. 7.3

Оскільки радіуси, проведені у вершини правильного n-кутника, розбивають його на n рівних трикутників, то площа n-кутника S_n у n разів більша за площу трикутника AOB. Тоді $S_n = n \cdot S_{AOB} = \frac{1}{2} n \cdot a_n \cdot R \cos \frac{180°}{n}$. Звідси

$$S_n = \frac{1}{2} P_n \cdot R \cos \frac{180°}{n}, \qquad (**)$$

де P_n — периметр даного правильного n-кутника.

При необмеженому збільшенні значення n величина $\frac{180°}{n}$ буде як завгодно мало відрізнятися від $0°$, а отже, $\cos \frac{180°}{n}$ наближатиметься до 1. Периметр P_n наближатиметься до довжини C кола, а площа S_n — до площі S круга. Тоді з урахуванням рівності (**) можна записати: $S = \frac{1}{2} C \cdot R$.

Із цієї рівності отримуємо формулу для знаходження площі круга:

$$\boxed{S = \pi R^2}$$

На рисунку 7.4 радіуси OA і OB ділять круг на дві частини, які зафарбовано в різні кольори. Кожну із цих частин разом із радіусами OA і OB називають **круговим сектором** або просто **сектором.**

Зрозуміло, що круг радіуса R можна поділити на 360 рівних секторів, кожен з яких міститиме дугу в $1°$. Площа такого сектора дорівнює $\frac{\pi R^2}{360}$. Тоді площу S сектора, який містить дугу кола в $n°$, обчислюють за формулою

$$\boxed{S = \frac{\pi R^2 n}{360}}$$

На рисунку 7.5 хорда AB ділить круг на дві частини, які зафарбовано в різні кольори. Кожну із цих частин разом із хордою AB називають **круговим сегментом** або просто **сегментом**. Хорду AB при цьому називають **основою сегмента**.

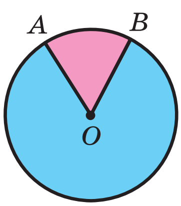


Рис. 7.4

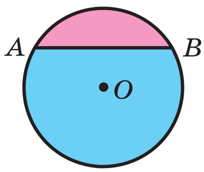


Рис. 7.5

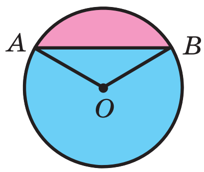


Рис. 7.6

Щоб знайти площу сегмента, зафарбованого в рожевий колір (рис. 7.6), треба від площі сектора, який містить хорду AB, відняти площу трикутника AOB (точка O — центр круга). Щоб знайти площу сегмента, зафарбованого в блакитний колір, треба до площі сектора, який не містить хорду AB, додати площу трикутника AOB.

Якщо хорда AB є діаметром круга, то вона ділить круг на два сегменти, які називають **півкругами**. Площу S півкруга обчислюють за формулою $S = \frac{\pi R^2}{2}$, де R — радіус круга.

Задача 1. Довжина дуги кола, радіус якого 25 см, дорівнює π см. Знайдіть градусну міру дуги.

Розв'язання. Із формули $l = \frac{\pi R n}{180}$ отримуємо $n = \frac{180 l}{\pi R}$. Отже, шукана градусна міра $n° = \left(\frac{180\pi}{\pi \cdot 25}\right)^{\circ} = 7{,}2°$.

Відповідь: 7,2°. ◀

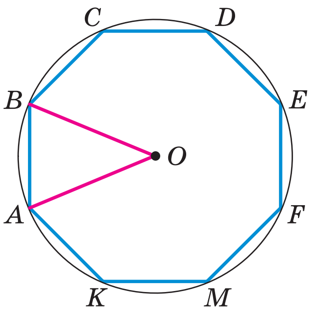


Рис. 7.7

Задача 2. У коло із центром O, радіус якого дорівнює 8 см, вписано правильний восьмикутник $ABCDEFMK$ (рис. 7.7). Знайдіть площі сектора та сегмента, які містять дугу AB.

Розв'язання. Кут AOB — центральний кут правильного восьмикутника, тому $\angle AOB = \frac{360°}{8} = 45°$.

Тоді шукана площа сектора дорівнює $S_{\text{сект}} = \frac{\pi \cdot 8^2 \cdot 45}{360} = 8\pi$ (см²), площа сегмента:

$$S_{\text{сегм}} = S_{\text{сект}} - S_{AOB} = 8\pi - \frac{1}{2} OA^2 \sin \angle AOB = \left(8\pi - 16\sqrt{2}\right) \text{ (см}^2\text{)}.$$

Відповідь: 8π см², $\left(8\pi - 16\sqrt{2}\right)$ см². ◄

?

1. Яке відношення позначають буквою π?
2. Назвіть наближене значення числа π з точністю до сотих.
3. За якою формулою обчислюють довжину кола?
4. За якою формулою обчислюють довжину дуги кола?
5. За якою формулою обчислюють площу круга?
6. Поясніть, яку геометричну фігуру називають круговим сектором.
7. За якою формулою обчислюють площу кругового сектора?
8. Поясніть, яку геометричну фігуру називають круговим сегментом.
9. Поясніть, як можна знайти площу кругового сегмента.

ВПРАВИ

7.1.° Знайдіть довжину кола, діаметр якого дорівнює:
1) 1,2 см; 2) 3,5 см.

7.2.° Знайдіть довжину кола, радіус якого дорівнює:
1) 6 см; 2) 1,4 м.

7.3.° Знайдіть площу круга, радіус якого дорівнює:
1) 4 см; 2) 14 дм.

7.4.° Знайдіть площу круга, діаметр якого дорівнює:
1) 20 см; 2) 3,2 дм.

7.5.° Знайдіть площу круга, довжина кола якого дорівнює l.

7.6.° Обчисліть площу поперечного перерізу дерева, яке в обхваті становить 125,6 см.

7.7.° Як зміниться довжина кола, якщо його радіус:
1) збільшити у 2 рази; 2) зменшити в 3 рази?

7.8.° Радіус кола збільшили на 1 см. На скільки збільшилась при цьому довжина кола?

7.9.° Довжина земного екватора наближено дорівнює 40 000 000 м. Вважаючи, що Земля має форму кулі, обчисліть її радіус у кілометрах.

7.10.° Обчисліть довжину червоної лінії, зображеної на рисунку 7.8.

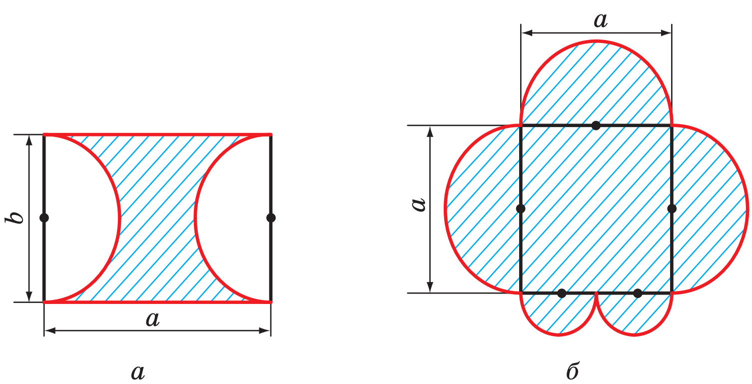


Рис. 7.8

7.11.° Як зміниться площа круга, якщо його радіус:
1) збільшити в 4 рази;
2) зменшити в 5 разів?

7.12.° Обчисліть площу заштрихованої фігури, зображеної на рисунку 7.9.

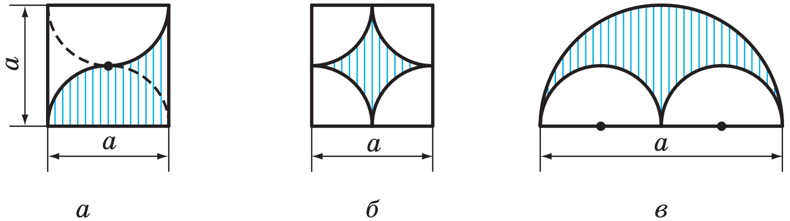
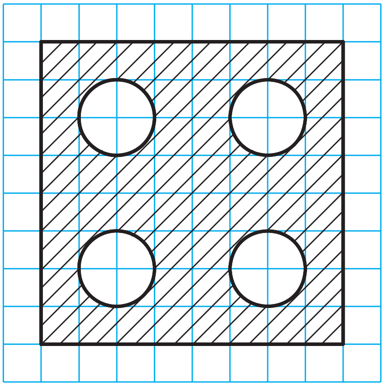
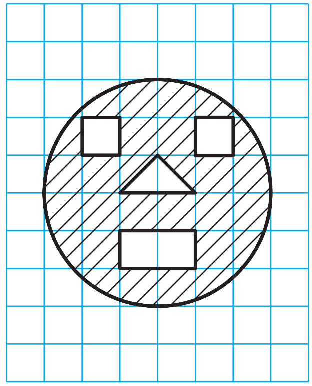


Рис. 7.9

7.13.° Обчисліть площу заштрихованої фігури (рис. 7.10), якщо довжина сторони клітинки дорівнює a.



а



б

Рис. 7.10

7.14.° Продаються млинці двох видів: діаметром 30 см і 20 см. Якщо всі млинці мають однакову товщину, то у якому випадку покупець з'їсть більше: коли з'їсть один великий млинець чи два менших?

7.15.° Знайдіть довжину кола, описаного навколо правильного трикутника зі стороною a.

7.16.° Знайдіть довжину кола, вписаного у квадрат зі стороною a.

7.17.° Знайдіть площу круга, описаного навколо квадрата зі стороною a.

7.18.° Знайдіть площу круга, вписаного в правильний шестикутник зі стороною a.

7.19.° Знайдіть площу круга, вписаного в правильний трикутник зі стороною a.

7.20.° Знайдіть площу круга, описаного навколо прямокутника зі сторонами a і b.

7.21.° Знайдіть площу круга, описаного навколо рівнобедреного трикутника з бічною стороною b і кутом α при основі.

7.22.° Знайдіть довжину кола, описаного навколо прямокутника зі стороною a і кутом α між даною стороною та діагоналлю прямокутника.

7.23.° Радіус кола дорівнює 8 см. Знайдіть довжину дуги кола, градусна міра якої дорівнює:
1) $4°$; 2) $18°$; 3) $160°$; 4) $320°$.

7.24.° Довжина дуги кола дорівнює 12π см, а її градусна міра — $27°$. Знайдіть радіус кола.

7.25.° Довжина дуги кола радіуса 24 см дорівнює 3π см. Знайдіть градусну міру дуги.

7.26.° Обчисліть довжину дуги екватора Землі, градусна міра якої дорівнює $1°$, якщо радіус екватора наближено дорівнює 6400 км.

7.27.° Радіус круга дорівнює 6 см. Знайдіть площу сектора, якщо градусна міра його дуги дорівнює:
1) $15°$; 2) $144°$; 3) $280°$.

7.28.° Площа сектора становить $\frac{5}{8}$ площі круга. Знайдіть градусну міру його дуги.

7.29.° Площа сектора дорівнює 6π дм^2. Знайдіть градусну міру дуги цього сектора, якщо радіус круга дорівнює 12 дм.

7.30.° Площа сектора дорівнює $\frac{5\pi}{4}$ см^2, а градусна міра дуги цього сектора становить $75°$. Знайдіть радіус круга, частиною якого є даний сектор.

7.31.° Чи може сектор круга бути його сегментом?

7.32.° Знайдіть площу кругового сегмента, якщо радіус круга дорівнює 5 см, а градусна міра дуги сегмента дорівнює:
1) $45°$; 2) $150°$; 3) $330°$.

7.33.° Знайдіть площу кругового сегмента, якщо радіус круга дорівнює 2 см, а градусна міра дуги сегмента дорівнює:
1) $60°$; 2) $300°$.

7.34.• Колеса автомобіля мають діаметр 65 см. Автомобіль їде з такою швидкістю, що колеса роблять 6 обертів щосекунди. Знайдіть швидкість автомобіля в кілометрах за годину. Відповідь округліть до десятих.

7.35.• Знайдіть довжину дуги, яку описує годинна стрілка завдовжки 6 см за 1 год.

7.36.• Знайдіть довжину дуги, яку описує хвилинна стрілка завдовжки 24 см за 40 хв.

7.37.• Радіус кола збільшили на a. Доведіть, що довжина кола збільшилася на величину, яка не залежить від радіуса даного кола.

7.38.• Сторона трикутника дорівнює 6 см, а прилеглі до неї кути дорівнюють 50° і 100°. Знайдіть довжини дуг, на які вершини трикутника ділять описане навколо нього коло.

7.39.• Сторона трикутника дорівнює $5\sqrt{3}$ см, а прилеглі до неї кути дорівнюють 35° і 25°. Знайдіть довжини дуг, на які вершини трикутника ділять описане навколо нього коло.

7.40.• На катеті AC прямокутного трикутника ABC ($\angle C = 90°$) як на діаметрі побудовано коло. Знайдіть довжину дуги цього кола, яка належить трикутнику, якщо $\angle A = 24°$, $AC = 20$ см.

7.41.• Кут при основі рівнобедреного трикутника дорівнює 70°. На висоті трикутника, яка проведена до основи і дорівнює 27 см, як на діаметрі побудовано коло. Знайдіть довжину дуги кола, яка належить трикутнику.

7.42.• Відрізок AB розбили на n відрізків. На кожному з них як на діаметрі побудували півколо. Цю дію повторили, розбивши даний відрізок на m відрізків. Знайдіть відношення сум довжин півкіл, отриманих у першому й другому випадках.

7.43.• Доведіть, що площа півкруга, побудованого на гіпотенузі прямокутного трикутника як на діаметрі (рис. 7.11), дорівнює сумі площ півкругів, побудованих на його катетах як на діаметрах.

7.44.• Дві труби, діаметри яких дорівнюють 30 см і 40 см, потрібно замінити однією трубою з такою ж пропускною здатністю[1]. Яким має бути діаметр цієї труби?

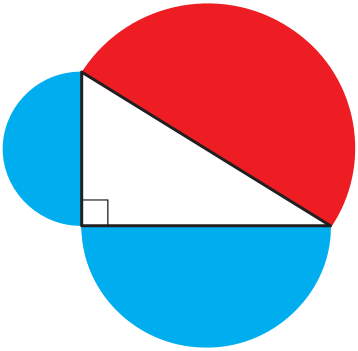


Рис. 7.11

7.45.• На скільки відсотків збільшиться площа круга, якщо його радіус збільшити на 10 %?

7.46.• У круг вписано квадрат зі стороною a. Знайдіть площу меншого із сегментів, основою яких є сторона квадрата.

7.47.• З листа жерсті, який має форму круга, вирізали правильний шестикутник найбільшої площі. Скільки відсотків жерсті пішло у відходи?

[1] Пропускна здатність водопровідної труби — це маса води, яка проходить через поперечний переріз труби за одиницю часу.

7.48.° У круг вписано правильний трикутник зі стороною a. Знайдіть площу меншого із сегментів, основою яких є сторона трикутника.

7.49.° У круговий сектор, радіус якого дорівнює R, а центральний кут становить 60°, вписано круг. Знайдіть площу цього круга.

7.50.•• Знайдіть площу розетки (заштрихованої фігури), яка зображена на рисунку 7.12, якщо сторона квадрата $ABCD$ дорівнює a.

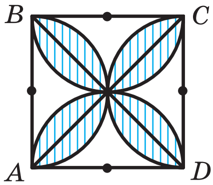


Рис. 7.12

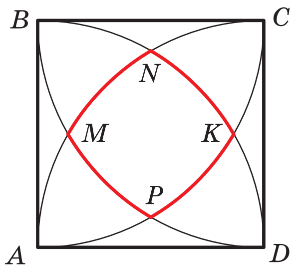


Рис. 7.13

7.51.•• При побудові чотирьох дуг із центрами у вершинах квадрата $ABCD$ і радіусами, які дорівнюють стороні квадрата, утворилася фігура, обмежена червоною лінією (рис. 7.13). Знайдіть довжину цієї лінії, якщо довжина сторони квадрата дорівнює a.

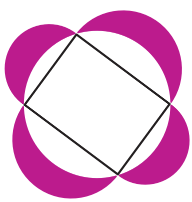


Рис. 7.14

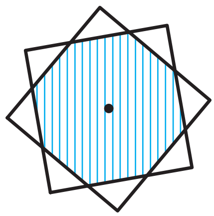


Рис. 7.15

7.52.•• (Задача Гіппократа[1]). Навколо прямокутника описали коло та на кожній його стороні як на діаметрі побудували півколо (рис. 7.14). Доведіть, що сума площ зафарбованих фігур (серпиків Гіппократа) дорівнює площі прямокутника.

7.53.•• Два квадрати зі сторонами 1 см мають спільний центр (рис. 7.15). Доведіть, що площа їхньої спільної частини більша за $\frac{3}{4}$.

[1] Гіппократ Хіоський — давньогрецький геометр (V ст. до н. е.).

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

7.54. Знайдіть сторону ромба, якщо його висота дорівнює 6 см, а кут між стороною ромба та однією з діагоналей дорівнює $15°$.

7.55. Бісектриса кута A прямокутника $ABCD$ ділить його сторону BC на відрізки BM і MC завдовжки 10 см і 14 см відповідно. На відрізки якої довжини ця бісектриса ділить діагональ прямокутника?

7.56. Сума кутів при більшій основі трапеції дорівнює $90°$. Доведіть, що відстань між серединами основ трапеції дорівнює піврізниці основ.

ГОТУЄМОСЯ ДО ВИВЧЕННЯ НОВОЇ ТЕМИ

7.57. Чому дорівнює відстань між точками A і B координатної прямої, якщо:

1) $A\ (3)$ і $B\ (7)$;
2) $A\ (-2)$ і $B\ (4)$;
3) $A\ (-2)$ і $B\ (-6)$;
4) $A\ (a)$ і $B\ (b)$?

7.58. Накресліть на координатній площині відрізок AB, знайдіть за рисунком координати середини відрізка та порівняйте їх із середнім арифметичним відповідних координат точок A і B, якщо:

1) $A\ (-1;\ -6)$, $B\ (5;\ -6)$;
2) $A\ (3;\ 1)$, $B\ (3;\ 5)$;
3) $A\ (3;\ -5)$, $B\ (-1;\ 3)$.

7.59. Побудуйте на координатній площині трикутник ABC і знайдіть його сторони, якщо $A\ (5;\ -1)$, $B\ (-3;\ 5)$, $C\ (-3;\ -1)$.

7.60. У якій координатній чверті знаходиться точка:

1) $A\ (3;\ -4)$;
2) $B\ (-3;\ 1)$;
3) $C\ (-4;\ -5)$;
4) $D\ (1;\ 9)$?

7.61. У якій координатній чверті знаходиться точка M, якщо:

1) її абсциса додатна, а ордината від'ємна;
2) добуток її абсциси та ординати — від'ємне число;
3) її абсциса й ордината від'ємні?

7.62. Що можна сказати про координати точки A, якщо:

1) точка A лежить на осі абсцис;
2) точка A лежить на осі ординат;
3) точка A лежить на бісектрисі четвертого координатного кута;
4) точка A лежить на бісектрисі третього координатного кута;
5) точка A лежить на бісектрисі першого координатного кута?

7.63. Укажіть координати вершин прямокутника $ABCD$ (рис. 7.16).

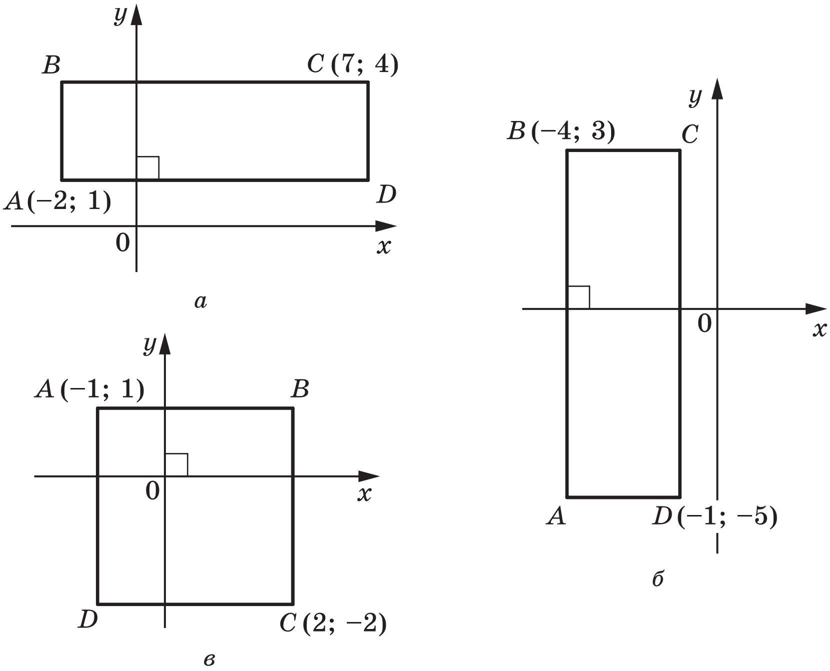


Рис. 7.16

СПОСТЕРІГАЙТЕ, РИСУЙТЕ, КОНСТРУЮЙТЕ, ФАНТАЗУЙТЕ

7.64. На площині позначили кілька точок. Деякі з них пофарбували червоним кольором, решту — синім. Відомо, що точок кожного кольору не менше трьох і жодні три точки одного кольору не лежать на одній прямій. Доведіть, що якісь три точки одного кольору є вершинами трикутника, на сторонах якого може лежати не більше двох точок іншого кольору.

ЗАВДАННЯ № 2 «ПЕРЕВІРТЕ СЕБЕ» В ТЕСТОВІЙ ФОРМІ

1. Знайдіть кількість сторін правильного многокутника, якщо його кут дорівнює $170°$.
А) 30; В) 36;
Б) 32; Г) такого многокутника не існує.

2. Чому дорівнює центральний кут правильного десятикутника?
А) $18°$; Б) $36°$; В) $144°$; Г) $10°$.

3. Який найбільший центральний кут може мати правильний многокутник?
А) $90°$; В) $150°$;
Б) $120°$; Г) не можна вказати.

4. У коло вписано правильний шестикутник, сторона якого дорівнює a. Знайдіть сторону трикутника, описаного навколо цього кола.
А) $\frac{a\sqrt{3}}{3}$; Б) $\frac{a\sqrt{3}}{2}$; В) $a\sqrt{3}$; Г) $2a\sqrt{3}$.

5. Чому дорівнює радіус кола, вписаного в правильний шестикутник, менша діагональ якого дорівнює 12 см?
А) 6 см; Б) $6\sqrt{3}$ см; В) $2\sqrt{3}$ см; Г) 12 см.

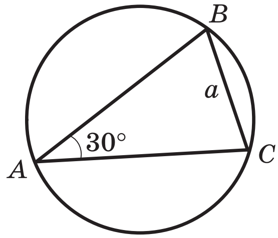
6. Знайдіть довжину дуги кола, градусна міра якої дорівнює $207°$, якщо радіус кола — 4 см.
А) 23 см; Б) 4,6 см; В) 23π см; Г) $4{,}6\pi$ см.

7. Яку частину площі круга становить площа сектора, центральний кут якого дорівнює $140°$?
А) $\frac{7}{9}$; Б) $\frac{7}{12}$; В) $\frac{7}{15}$; Г) $\frac{7}{18}$.

8. Вписаний у коло кут, який дорівнює $40°$, спирається на дугу завдовжки 8 см. Яка довжина даного кола?
А) 72 см; Б) 72π см; В) 36 см; Г) 36π см.

9. Якою має бути довжина хорди кола, радіус якого дорівнює R, щоб довжини дуг, на які кінці цієї хорди ділять коло, відносилися як $2 : 1$?
А) R; Б) $2R$; В) $\frac{R\sqrt{3}}{2}$; Г) $R\sqrt{3}$.

10. На рисунку зображено вписаний у коло трикутник ABC, $\angle A = 30°$, $BC = a$. Чому дорівнює площа сегмента, основа якого стягує дугу BAC?



А) $\dfrac{a^2\left(2\pi + 3\sqrt{3}\right)}{12}$;

Б) $\dfrac{a^2\left(2\pi - 3\sqrt{3}\right)}{12}$;

В) $\dfrac{a^2\left(10\pi + 3\sqrt{3}\right)}{12}$;

Г) $\dfrac{a^2\left(10\pi - 3\sqrt{3}\right)}{12}$.

11. У трикутнику ABC відомо, що $\angle A = 20°$, $\angle C = 30°$, $AC = 14$ см. Коло із центром у точці A дотикається до прямої BC. Знайдіть довжину дуги цього кола, яка належить трикутнику ABC.

А) $\dfrac{7\pi}{18}$ см; Б) $\dfrac{7\pi}{9}$ см; В) $\dfrac{7\pi}{12}$ см; Г) $\dfrac{7\pi}{6}$ см.

12. Радіус кола, описаного навколо правильного многокутника, дорівнює $6\sqrt{3}$ см, а радіус вписаного в нього кола — 9 см. Скільки сторін має многокутник?

А) 6; Б) 12; В) 9; Г) 18.

ГОЛОВНЕ В ПАРАГРАФІ 2

Правильний многокутник

Многокутник називають правильним, якщо в нього всі сторони рівні та всі кути рівні.

Властивості правильного многокутника

- Правильний многокутник є опуклим многокутником.
- Будь-який правильний многокутник є як вписаним у коло, так і описаним навколо кола, причому центри описаного та вписаного кіл збігаються.

Формули для знаходження радіусів описаного та вписаного кіл правильного многокутника

Кількість сторін правильного n-кутника зі стороною a	n	$n = 3$	$n = 4$	$n = 6$
Радіус описаного кола	$R_n = \dfrac{a}{2\sin\dfrac{180^\circ}{n}}$	$R_3 = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$	$R_4 = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$	$R_6 = a$
Радіус вписаного кола	$r_n = \dfrac{a}{2\,\mathrm{tg}\dfrac{180^\circ}{n}}$	$r_3 = \dfrac{a\sqrt{3}}{6}$	$r_4 = \dfrac{a}{2}$	$r_6 = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$

Довжина кола

$C = 2\pi R$

Довжина дуги кола в n°

$$l = \frac{\pi R n}{180}$$

Площа круга

$S = \pi R^2$

Площа сектора, який містить дугу кола в n°

$$S = \frac{\pi R^2 n}{360}$$

ДЕКАРТОВІ КООРДИНАТИ НА ПЛОЩИНІ §3

Вивчаючи матеріал цього параграфа, ви розширите свої знання про координатну площину.

Ви навчитеся знаходити довжину відрізка та координати його середини, знаючи координати його кінців.

Отримаєте уявлення про рівняння фігури, виведете рівняння прямої та кола.

Ознайомитеся з методом координат, який дає змогу розв'язувати геометричні задачі засобами алгебри.

8. Відстань між двома точками із заданими координатами. Координати середини відрізка

У 6 класі ви ознайомилися з координатною площиною, тобто з площиною, на якій зображено дві перпендикулярні координатні прямі (вісь абсцис і вісь ординат) зі спільним початком відліку (рис. 8.1). Ви вмієте зображати на ній точки за їхніми координатами і, навпаки, знаходити координати точки, відміченої на координатній площині.

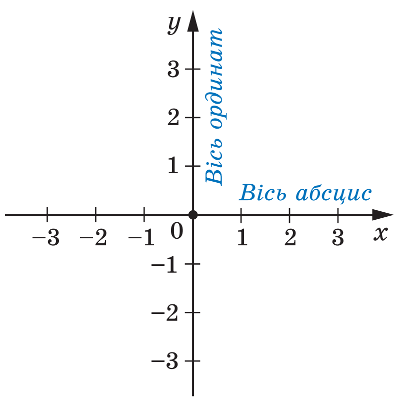


Рис. 8.1

Домовилися координатну площину з віссю x (віссю абсцис) і віссю y (віссю ординат) називати **площиною xy**.

Координати точки на площині xy називають **декартовими координатами** на честь французького математика Рене Декарта (див. оповідання на с. 101).

Рис. 8.2

Ви знаєте, як знаходити відстань між двома точками, заданими своїми координатами на координатній прямій. Для точок A (x_1) і B (x_2) (рис. 8.2) маємо:

$$AB = |x_2 - x_1|.$$

Навчимося знаходити відстань між точками A $(x_1; y_1)$ і B $(x_2; y_2)$, заданими на площині xy.

Розглянемо випадок, коли відрізок AB не перпендикулярний до жодної з координатних осей (рис. 8.3).

Через точки A і B проведемо прямі, перпендикулярні до координатних осей. Отримаємо прямокутний трикутник ACB, у якому $BC = |x_2 - x_1|$, $AC = |y_2 - y_1|$. Звідси $AB^2 = BC^2 + AC^2 = |x_2 - x_1|^2 + |y_2 - y_1|^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$.

Тоді формулу відстані між точками A $(x_1; y_1)$ і B $(x_2; y_2)$ можна записати так:

$$\boxed{\boldsymbol{AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}}}$$

Доведіть самостійно, що ця формула залишається правильною і для випадку, коли відрізок AB перпендикулярний до однієї з осей координат.

Нехай A $(x_1; y_1)$ і B $(x_2; y_2)$ — точки площини xy. Знайдемо координати $(x_0; y_0)$ точки M — середини відрізка AB.

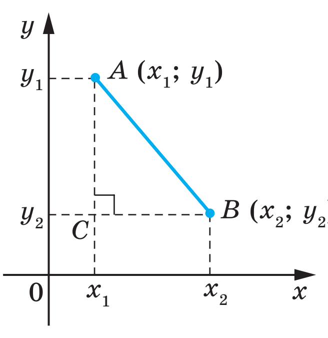


Рис. 8.3

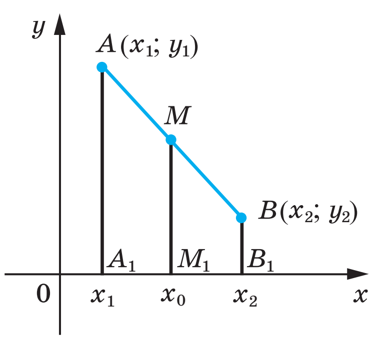


Рис. 8.4

Розглянемо випадок, коли відрізок AB не перпендикулярний до жодної з координатних осей (рис. 8.4). Вважатимемо, що $x_2 > x_1$ (випадок, коли $x_2 < x_1$, розглядається аналогічно). Через точки A, M і B проведемо прямі, перпендикулярні до осі абсцис, які перетнуть цю вісь відповідно в точках A_1, M_1 і B_1. За теоремою Фалеса $A_1M_1 = M_1B_1$, тоді $|x_0 - x_1| = |x_2 - x_0|$. Оскільки $x_2 > x_0 > x_1$, то можемо записати: $x_0 - x_1 = x_2 - x_0$. Звідси

$$\boxed{x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2}}$$

Аналогічно можна показати, що

$$\boxed{y_0 = \frac{y_1 + y_2}{2}}$$

Формули для знаходження координат середини відрізка залишаються правильними й у випадку, коли відрізок AB перпендикулярний до однієї з осей координат. Доведіть це самостійно.

Задача 1. Доведіть, що трикутник, вершинами якого є точки $A\ (-1;\ 7)$, $B\ (1;\ 3)$ і $C\ (5;\ 5)$, є рівнобедреним прямокутним.

Розв'язання. Використовуючи формулу відстані між двома точками, знайдемо сторони даного трикутника:

$$AB = \sqrt{(1+1)^2 + (3-7)^2} = \sqrt{4+16} = \sqrt{20};$$
$$BC = \sqrt{(5-1)^2 + (5-3)^2} = \sqrt{16+4} = \sqrt{20};$$
$$AC = \sqrt{(5+1)^2 + (5-7)^2} = \sqrt{36+4} = \sqrt{40}.$$

Отже, $AB = BC$, тобто трикутник ABC рівнобедрений.

Оскільки $AB^2 + BC^2 = 20 + 20 = 40 = AC^2$, то трикутник ABC прямокутний. ◄

Задача 2. Точка $M\ (2;\ -5)$ — середина відрізка AB, $A\ (-1;\ 3)$. Знайдіть координати точки B.

Розв'язання. Позначимо $(x_B;\ y_B)$ — координати точки B, $(x_A;\ y_A)$ — координати точки A, $(x_M;\ y_M)$ — координати точки M.

Оскільки $\frac{x_A + x_B}{2} = x_M$, то отримуємо: $\frac{-1 + x_B}{2} = 2$; $-1 + x_B = 4$; $x_B = 5$.

Аналогічно $\frac{y_A + y_B}{2} = y_M$; $\frac{3 + y_B}{2} = -5$; $y_B = -13$.

Відповідь: $B\ (5;\ -13)$. ◄

Задача 3. Доведіть, що чотирикутник $ABCD$ з вершинами в точках $A\ (2;\ -1)$, $B\ (1;\ 3)$, $C\ (-3;\ 2)$ і $D\ (-2;\ -2)$ є прямокутником.

Розв'язання. Нехай точка M — середина діагоналі AC. Тоді

$$x_M = \frac{x_A + x_C}{2} = \frac{2-3}{2} = -0{,}5;\quad y_M = \frac{y_A + y_C}{2} = \frac{-1+2}{2} = 0{,}5.$$

Отже, $M\ (-0{,}5;\ 0{,}5)$.

Нехай точка K — середина діагоналі BD. Тоді

$$x_K = \frac{x_B + x_D}{2} = \frac{1-2}{2} = -0{,}5;\quad y_K = \frac{y_B + y_D}{2} = \frac{3-2}{2} = 0{,}5.$$

Отже, $K\ (-0{,}5;\ 0{,}5)$.

Таким чином, точки M і K збігаються, тобто діагоналі чотирикутника $ABCD$ мають спільну середину. Звідси випливає, що чотирикутник $ABCD$ — паралелограм.

Знайдемо діагоналі паралелограма:

$$AC = \sqrt{(-3-2)^2 + (2+1)^2} = \sqrt{34},\quad BD = \sqrt{(-2-1)^2 + (-2-3)^2} = \sqrt{34}.$$

Отже, діагоналі паралелограма $ABCD$ рівні. Звідси випливає, що цей паралелограм є прямокутником. ◄

1. Як знайти відстань між двома точками, якщо відомо їхні координати?
2. Як знайти координати середини відрізка, якщо відомо координати його кінців?

ВПРАВИ

8.1.° Знайдіть відстань між точками A і B, якщо:
1) $A\ (10;\ 14)$, $B\ (5;\ 2)$; 2) $A\ (-1;\ 2)$, $B\ (4;\ -3)$.

8.2.° Знайдіть відстань між точками C і D, якщо:
1) $C\ (-2;\ -4)$, $D\ (4;\ -12)$; 2) $C\ (6;\ 3)$, $D\ (7;\ -1)$.

8.3.° Вершинами трикутника є точки $A\ (-1;\ 3)$, $B\ (5;\ 9)$, $C\ (6;\ 2)$. Доведіть, що трикутник ABC рівнобедрений.

8.4.° Доведіть, що точка $M\ (0;\ -1)$ є центром кола, описаного навколо трикутника ABC, якщо $A\ (6;\ -9)$, $B\ (-6;\ 7)$, $C\ (8;\ 5)$.

8.5.° Доведіть, що кути B і C трикутника ABC рівні, якщо $A\ (5;\ -7)$, $B\ (-3;\ 8)$, $C\ (-10;\ -15)$.

8.6.° Знайдіть координати середини відрізка BC, якщо:
1) $B\ (5;\ 4)$, $C\ (3;\ 2)$; 2) $B\ (-2;\ -1)$, $C\ (-1;\ 7)$.

8.7.° Точка C — середина відрізка AB. Знайдіть координати точки B, якщо:
1) $A\ (3;\ -4)$, $C\ (2;\ 1)$; 2) $A\ (-1;\ 1)$, $C\ (0{,}5;\ -1)$.

8.8.° Точка K — середина відрізка AD. Заповніть таблицю:

Точка	Координати точки		
A	$(-3; 1)$	$(-8; 2)$	
D	$(-1; -3)$		$(-9; 2)$
K		$(-4; 6)$	$(1; 2)$

8.9.° Знайдіть медіану BM трикутника, вершинами якого є точки $A\ (3; -2)$, $B\ (2; 3)$ і $C\ (7; 4)$.

8.10.° Дано точки $A\ (-2; 4)$ і $B\ (2; -8)$. Знайдіть відстань від початку координат до середини відрізка AB.

8.11.• Доведіть, що трикутник з вершинами в точках $A\ (2; 7)$, $B\ (-1; 4)$ і $C\ (1; 2)$ є прямокутним.

8.12.• Точки $A\ (-1; 2)$ і $B\ (7; 4)$ є вершинами прямокутного трикутника. Чи може третя вершина трикутника мати координати:
1) $(7; 2)$; 2) $(2; -3)$?

8.13.• Чи лежать на одній прямій точки:
1) $A\ (-2; -7)$, $B\ (-1; -4)$ і $C\ (5; 14)$;
2) $D\ (-1; 3)$, $E\ (2; 13)$ і $F\ (5; 21)$?
У разі ствердної відповіді вкажіть, яка з точок лежить між двома іншими.

8.14.• Доведіть, що точки $M\ (-4; 5)$, $N\ (-10; 7)$ і $K\ (8; 1)$ лежать на одній прямій, та вкажіть, яка з них лежить між двома іншими.

8.15.• При якому значенні x відстань між точками $C\ (3; 2)$ і $D\ (x; -1)$ дорівнює 5?

8.16.• На осі абсцис знайдіть точку, яка рівновіддалена від точок $A\ (-1; -1)$ і $B\ (2; 4)$.

8.17.• Знайдіть координати точки, яка належить осі ординат і рівновіддалена від точок $D\ (-2; -3)$ і $E\ (4; 1)$.

8.18.• Знайдіть координати точки, яка ділить відрізок AB у відношенні $1 : 3$, рахуючи від точки A, якщо $A\ (5; -3)$ і $B\ (-3; 7)$.

8.19.• Чотирикутник $ABCD$ — паралелограм, $A\ (-5; 1)$, $B\ (-4; 4)$, $C\ (-1; 5)$. Знайдіть координати вершини D.

8.20.• Чотирикутник $ABCD$ — паралелограм, $A\ (-2; -2)$, $C\ (4; 1)$, $D\ (-1; 1)$. Знайдіть координати вершини B.

8.21.• Доведіть, що чотирикутник $ABCD$ з вершинами в точках $A\ (-2; 8)$, $B\ (3; -3)$, $C\ (6; 2)$ і $D\ (1; 13)$ є паралелограмом.

8.22.• Доведіть, що чотирикутник $ABCD$ з вершинами в точках $A\ (-3; -2)$, $B\ (-1; 2)$, $C\ (1; -2)$ і $D\ (-1; -6)$ є ромбом.

8.23.• Доведіть, що чотирикутник $ABCD$ з вершинами в точках A (−2; 6), B (−8; −2), C (0; −8) і D (6; 0) є квадратом.

8.24.• Точки D (1; 4) і E (2; 2) — середини сторін AC і BC трикутника ABC відповідно. Знайдіть координати вершин A і C, якщо B (−3; −1).

8.25.• Знайдіть довжину відрізка, кінці якого належать осям координат, а серединою є точка M (−3; 8).

8.26.•• Знайдіть координати вершини C рівностороннього трикутника ABC, якщо A (2; −3) і B (−2; 3).

8.27.•• Знайдіть координати вершини E рівностороннього трикутника DEF, якщо D (−6; 0) і F (2; 0).

8.28.•• У трикутнику ABC відомо, що $AB = BC$, A (5; 9), C (1; −3), модулі координат точки B рівні. Знайдіть координати точки B.

8.29.•• Знайдіть координати всіх точок C осі абсцис таких, що трикутник ABC рівнобедрений і A (1; 1), B (2; 3).

8.30.•• Знайдіть координати всіх точок B осі ординат таких, що трикутник ABC прямокутний і A (1; 3), C (3; 7).

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

8.31. У трикутнику ABC відомо, що $\angle C = 90°$, $AB = 9$ см, $BC = 3$ см. На гіпотенузі AB позначено точку M так, що $AM : MB = 1 : 2$. Знайдіть відрізок CM.

8.32. Знайдіть кути ромба, якщо кут між висотою та діагоналлю ромба, проведеними з однієї вершини, дорівнює 28°.

8.33. Діагональ BD паралелограма $ABCD$ дорівнює 24 см, точка E — середина сторони BC. Знайдіть відрізки, на які пряма AE ділить діагональ BD.

ГОТУЄМОСЯ ДО ВИВЧЕННЯ НОВОЇ ТЕМИ

8.34. Точка A (1; −6) — центр кола, точка B (10; 6) належить цьому колу. Чому дорівнює радіус кола?

8.35. Відрізок CD — діаметр кола. Знайдіть координати центра кола та радіус кола, якщо C (6; −4), D (−2; 10).

8.36. Яка фігура є графіком рівняння:

1) $y = 1$;
2) $y = 3x - 4$;
3) $x = -2$;
4) $(x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 0$;
5) $xy = 1$;
6) $y = \sqrt{x}$?

9. Рівняння фігури. Рівняння кола

Із курсу алгебри 7 класу ви знаєте, яку фігуру називають графіком рівняння. У цьому пункті ви ознайомитеся з поняттям рівняння фігури.

Координати $(x; y)$ кожної точки параболи, зображеної на рисунку 9.1, є розв'язком рівняння $y = x^2$. І навпаки, кожний розв'язок рівняння з двома змінними $y = x^2$ є координатами точки, яка лежить на цій параболі. У цьому разі говорять, що рівняння параболи, зображеної на рисунку 9.1, має вигляд $y = x^2$.

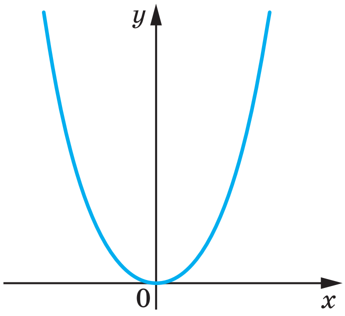


Рис. 9.1

Означення. ***Рівнянням фігури F*, заданої на площині *xy*, називають рівняння з двома змінними *x* і *y*, яке має такі властивості:**

1) якщо точка належить фігурі *F*, то її координати є розв'язком даного рівняння;

2) будь-який розв'язок $(x; y)$ даного рівняння є координатами точки, яка належить фігурі *F*.

Наприклад, рівняння прямої, зображеної на рисунку 9.2, має вигляд $y = 2x - 1$, а рівняння гіперболи, зображеної на рисунку 9.3, має вигляд $y = \frac{1}{x}$. Прийнято говорити, що, наприклад, рівняння $y = 2x - 1$ і $y = \frac{1}{x}$ **задають** пряму та гіперболу відповідно.

Якщо дане рівняння є рівнянням фігури F, то цю фігуру можна розглядати як геометричне місце точок (ГМТ), координати яких задовольняють дане рівняння.

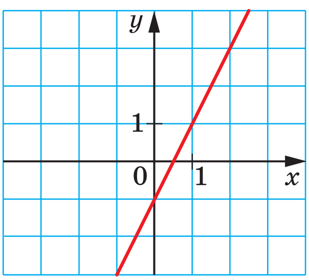


Рис. 9.2

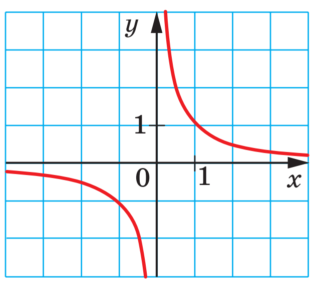


Рис. 9.3

Користуючись цими міркуваннями, виведемо рівняння кола радіуса R із центром у точці A (a; b).

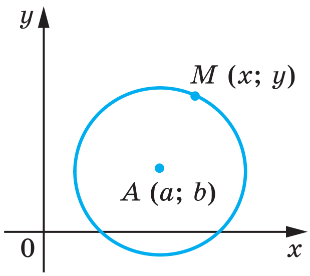


Рис. 9.4

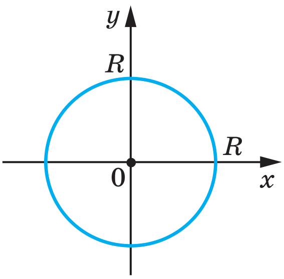


Рис. 9.5

Нехай M (x; y) — довільна точка даного кола (рис. 9.4). Тоді $AM = R$. Використовуючи формулу відстані між точками, отримаємо: $\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}=R.$ Звідси

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2. \qquad (*)$$

Ми показали, що координати (x; y) довільної точки M даного кола є розв'язком рівняння (*). Тепер покажемо, що будь-який розв'язок рівняння $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$ є координатами точки, яка належить даному колу.

Нехай пара чисел (x_1; y_1) — довільний розв'язок рівняння (*). Тоді $(x_1 - a)^2 + (y_1 - b)^2 = R^2$. Звідси $\sqrt{(x_1-a)^2+(y_1-b)^2}=R.$

Ця рівність показує, що точка N (x_1; y_1) віддалена від центра кола A (a; b) на відстань, що дорівнює радіусу кола, а отже, точка N (x_1; y_1) належить даному колу.

Отже, ми довели таку теорему.

Теорема 9.1. ***Рівняння кола радіуса R із центром у точці A (a; b) має вигляд***

$$\boxed{(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2}$$

Правильним є і таке твердження: *будь-яке рівняння виду* $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$, *де* a, b *і* R *— деякі числа, причому* $R > 0$, *є рівнянням кола радіуса* R *із центром у точці з координатами* (a; b).

Якщо центром кола є початок координат (рис. 9.5), то $a = b = 0$. У цьому разі рівняння кола має вигляд

$$x^2 + y^2 = R^2.$$

Задача 1. Складіть рівняння кола, діаметром якого є відрізок AB, якщо $A\ (-5;\ 9)$, $B\ (7;\ -3)$.

Розв'язання. Оскільки центр кола є серединою діаметра, то можемо знайти координати $(a;\ b)$ центра C кола:

$$a = \frac{-5+7}{2} = 1,\quad b = \frac{9-3}{2} = 3.$$

Отже, $C\ (1;\ 3)$.

Радіус кола R дорівнює відрізку AC. Тоді $R^2 = (1 + 5)^2 + (3 - 9)^2 = 72$.

Отже, шукане рівняння має вигляд

$$(x - 1)^2 + (y - 3)^2 = 72.$$

Відповідь: $(x - 1)^2 + (y - 3)^2 = 72$. ◄

Задача 2. Доведіть, що рівняння $x^2 + y^2 + 6x - 14y + 50 = 0$ задає коло. Знайдіть координати центра та радіус цього кола.

Розв'язання. Подамо дане рівняння у вигляді $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$:

$$x^2 + 6x + 9 + y^2 - 14y + 49 + 50 - 58 = 0;$$
$$(x + 3)^2 + (y - 7)^2 = 8.$$

Отже, дане рівняння є рівнянням кола із центром у точці $(-3;\ 7)$ і радіусом $2\sqrt{2}$.

Відповідь: $(-3;\ 7)$, $2\sqrt{2}$. ◄

Задача 3. Доведіть, що трикутник з вершинами в точках $A\ (-2;\ -3)$, $B\ (1;\ 3)$ і $C\ (5;\ 1)$ є прямокутним, і складіть рівняння кола, описаного навколо трикутника ABC.

Розв'язання. Знайдемо квадрати сторін даного трикутника:

$$AB^2 = (1 + 2)^2 + (3 + 3)^2 = 45;$$
$$AC^2 = (5 + 2)^2 + (1 + 3)^2 = 65;$$
$$BC^2 = (5 - 1)^2 + (1 - 3)^2 = 20.$$

Оскільки $AB^2 + BC^2 = AC^2$, то даний трикутник є прямокутним із прямим кутом при вершині B. Центром описаного кола є середина гіпотенузи AC — точка $(1,5;\ -1)$, радіус кола $R = \frac{1}{2}AC = \frac{\sqrt{65}}{2}$.

Отже, шукане рівняння має вигляд

$$(x - 1,5)^2 + (y + 1)^2 = \frac{65}{4}.$$

Відповідь: $(x - 1,5)^2 + (y + 1)^2 = \frac{65}{4}$. ◄

1. Що називають рівнянням фігури, заданої на площині xy?
2. Який вигляд має рівняння кола із центром у точці $(a; b)$ і радіусом R?
3. Який вигляд має рівняння кола із центром у початку координат і радіусом R?

ВПРАВИ

9.1.° Визначте за рівнянням кола координати його центра та радіус:

1) $(x - 8)^2 + (y - 3)^2 = 25$;
2) $(x + 5)^2 + y^2 = 9$;
3) $x^2 + y^2 = 7$;
4) $x^2 + (y + 1)^2 = 3$.

9.2.° Складіть рівняння кола, якщо відомо координати його центра A і радіус R:

1) $A\ (3;\ 4)$, $R = 4$;
2) $A\ (-2;\ 0)$, $R = 1$;
3) $A\ (7;\ -6)$, $R = \sqrt{2}$;
4) $A\ (0;\ 5)$, $R = \sqrt{7}$.

9.3.° Складіть рівняння кола, якщо відомо координати його центра B і радіус R:

1) $B\ (-1;\ 9)$, $R = 9$;
2) $B\ (-8;\ -8)$, $R = \sqrt{3}$.

9.4.° Визначте координати центра та радіус кола, зображеного на рисунку 9.6, і запишіть рівняння цього кола.

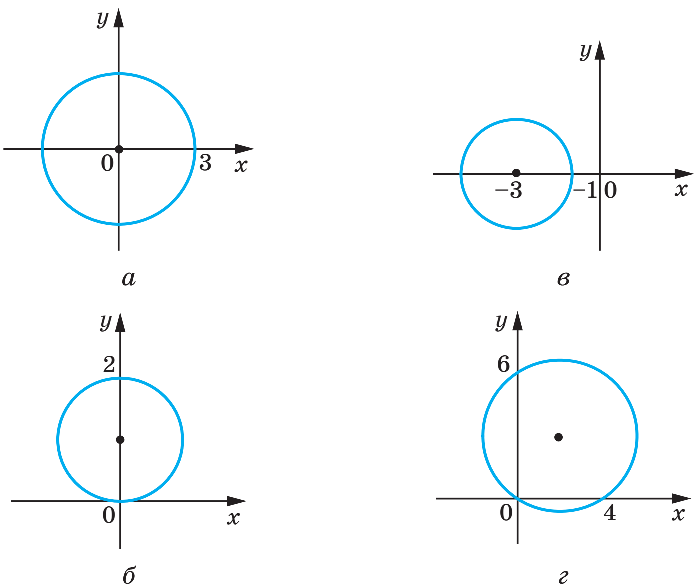


Рис. 9.6

9.5.° Радіус кола із центром у точці A дорівнює 4 (рис. 9.7). Складіть рівняння цього кола.

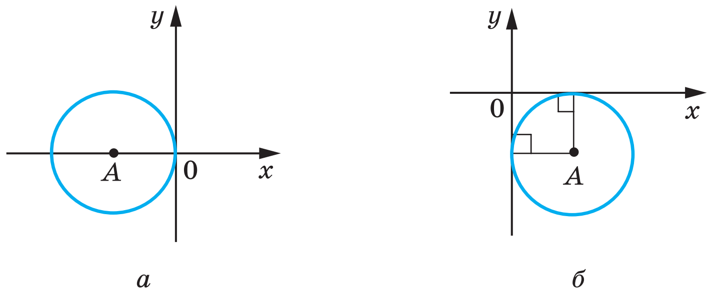


Рис. 9.7

9.6.° Побудуйте на координатній площині коло, рівняння якого має вигляд:
1) $x^2 + y^2 = 4$; 2) $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 25$.

9.7.° Побудуйте на координатній площині коло, рівняння якого має вигляд $(x - 4)^2 + y^2 = 9$.

9.8.° Коло задано рівнянням $(x + 6)^2 + (y - 1)^2 = 10$. З'ясуйте, які з точок A (−3; 0), B (−5; −2), C (1; 0), D (−4; 3), E (−7; −3), F (−9; 0) лежать: 1) на колі; 2) усередині кола; 3) поза колом.

9.9.° Чи належить колу $(x - 2)^2 + (y + 2)^2 = 100$ точка:
1) A (8; −8); 2) B (6; −9); 3) C (−3; 7); 4) D (−4; 6)?

9.10.° Складіть рівняння кола із центром у точці M (−3; 1), яке проходить через точку K (−1; 5).

9.11.° Складіть рівняння кола, діаметром якого є відрізок AB, якщо A (2; −7), B (−2; 3).

9.12.• Доведіть, що відрізок AB є діаметром кола $(x - 5)^2 + (y + 4)^2 = 17$, якщо A (1; −5), B (9; −3).

9.13.• Доведіть, що відрізок CD є хордою кола $x^2 + (y - 9)^2 = 169$, якщо C (5; −3), D (−12; 4).

9.14.• Складіть рівняння кола, центром якого є точка P (−6; 7) та яке дотикається до осі ординат.

9.15.• Складіть рівняння кола, центр якого знаходиться на прямій $y = -5$ та яке дотикається до осі абсцис у точці S (2; 0).

9.16.• Скільки існує кіл, які проходять через точку (3; 5), радіуси яких дорівнюють $3\sqrt{5}$ і центри яких належать осі ординат? Запишіть рівняння кожного такого кола.

9.17.• Складіть рівняння кола, яке проходить через точки $A\ (-4;\ 1)$ і $B\ (8;\ 5)$ і центр якого належить осі абсцис.

9.18.• Доведіть, що коло $(x + 6)^2 + (y - 3)^2 = 36$:
1) дотикається до осі ординат;
2) перетинає вісь абсцис;
3) не має спільних точок з прямою $y = 10$.

9.19.•• Установіть, чи є дане рівняння рівнянням кола. У разі ствердної відповіді вкажіть координати центра та радіус R цього кола:
1) $x^2 + 2x + y^2 - 10y - 23 = 0$;
2) $x^2 - 12x + y^2 + 4y + 40 = 0$;
3) $x^2 + y^2 + 6y + 8x + 34 = 0$;
4) $x^2 + y^2 - 4x - 14y + 51 = 0$.

9.20.•• Доведіть, що дане рівняння є рівнянням кола, і вкажіть координати центра та радіус R цього кола:
1) $x^2 + y^2 + 16y + 60 = 0$;
2) $x^2 + y^2 - 8x + 4y + 15 = 0$.

9.21.•• Доведіть, що трикутник із вершинами в точках $A\ (-1;\ -2)$, $B\ (-1;\ 2)$, $C\ (5;\ 2)$ є прямокутним, і складіть рівняння кола, описаного навколо цього трикутника.

9.22.•• Складіть рівняння кола, радіус якого дорівнює 5 та яке проходить через точки $C\ (-1;\ 5)$ і $D\ (6;\ 4)$.

9.23.•• Складіть рівняння кола, радіус якого дорівнює $\sqrt{10}$ та яке проходить через точки $M\ (-2;\ 1)$ і $K\ (-4;\ -1)$.

9.24.•• Складіть рівняння кола, яке дотикається до координатних осей і прямої $y = -4$.

9.25.•• Складіть рівняння кола, яке дотикається до координатних осей і прямої $x = 2$.

9.26.* Складіть рівняння кола, яке проходить через точки:
1) $A\ (-3;\ 7)$, $B\ (-8,\ 2)$, $C\ (-6,\ -2)$;
2) $M\ (-1;\ 10)$, $N\ (12;\ -3)$, $K\ (4;\ 9)$.

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

9.27. Бісектриса кута B паралелограма $ABCD$ перетинає його сторону AD у точці E, $AB = BE = 12$ см, $ED = 18$ см. Знайдіть площу паралелограма.

9.28. Перпендикуляр, опущений із вершини прямокутника на його діагональ, ділить цю діагональ на відрізки завдовжки 9 см і 16 см. Знайдіть периметр прямокутника.

9.29. У рівнобічну трапецію вписано коло радіуса 12 см. Одна з бічних сторін точкою дотику ділиться на два відрізки, один з яких дорівнює 16 см. Знайдіть площу трапеції.

СПОСТЕРІГАЙТЕ, РИСУЙТЕ, КОНСТРУЮЙТЕ, ФАНТАЗУЙТЕ

9.30. На площині позначили точки A і B. За допомогою лише циркуля побудуйте точку C таку, щоб точка B була серединою відрізка AC.

10. Рівняння прямої

У попередньому пункті, розглядаючи коло як ГМТ, рівновіддалених від даної точки, ми вивели його рівняння. Для того щоб вивести рівняння прямої, розглянемо її як ГМТ, рівновіддалених від двох даних точок.

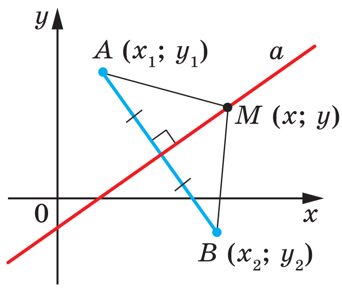


Рис. 10.1

Нехай a — задана пряма. Виберемо дві точки A $(x_1;\ y_1)$ і B $(x_2;\ y_2)$ так, щоби пряма a була серединним перпендикуляром відрізка AB (рис. 10.1).

Нехай M $(x;\ y)$ — довільна точка прямої a. Тоді за властивістю серединного перпендикуляра відрізка виконується рівність $MA = MB$, тобто

$$\sqrt{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2}=\sqrt{(x-x_2)^2+(y-y_2)^2}. \qquad (*)$$

Ми показали, що координати $(x;\ y)$ довільної точки M прямої a є розв'язком рівняння (*).

Тепер покажемо, що будь-який розв'язок рівняння (*) є координатами точки, яка належить даній прямій a.

Нехай $(x_0;\ y_0)$ — довільний розв'язок рівняння (*).

Тоді $\sqrt{(x_0-x_1)^2+(y_0-y_1)^2}=\sqrt{(x_0-x_2)^2+(y_0-y_2)^2}$. Ця рівність означає, що точка N $(x_0;\ y_0)$ рівновіддалена від точок A $(x_1;\ y_1)$ і B $(x_2;\ y_2)$, отже, точка N належить серединному перпендикуляру відрізка AB, тобто прямій a.

Таким чином, ми довели, що рівняння (*) є рівнянням даної прямої a.

Проте з курсу алгебри 7 класу ви знаєте, що рівняння прямої має набагато простіший вигляд, а саме: $ax + by = c$, де a, b і c — деякі числа, причому a і b не дорівнюють нулю одночасно. Покажемо, що рівняння (*) можна звести до такого вигляду.

Піднесемо обидві частини рівняння (*) до квадрата. Маємо: $(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 = (x - x_2)^2 + (y - y_2)^2$.

Розкриємо дужки та зведемо подібні доданки. Отримаємо:

$$2\,(x_2 - x_1)\,x + 2\,(y_2 - y_1)\,y = x_2^2 + y_2^2 - x_1^2 - y_1^2.$$

Позначивши $2\,(x_2 - x_1) = a$, $2\,(y_2 - y_1) = b$, $x_2^2 + y_2^2 - x_1^2 - y_1^2 = c$, отримаємо рівняння $ax + by = c$.

Оскільки точки $A\,(x_1; y_1)$ і $B\,(x_2; y_2)$ є різними, то хоча б одна з різниць $x_2 - x_1$ і $y_2 - y_1$ не дорівнює нулю. Отже, числа a і b не дорівнюють нулю одночасно.

Таким чином, ми довели таку теорему.

Теорема 10.1. ***Рівняння прямої має вигляд***

$$\boxed{ax + by = c,}$$

де a, b і c — деякі числа, причому a і b не дорівнюють нулю одночасно.

Є правильним і таке твердження: *будь-яке рівняння виду $ax + by = c$, де a, b і c — деякі числа, причому a і b не дорівнюють нулю одночасно, є рівнянням прямої.*

Якщо $a = b = c = 0$, то графіком рівняння $ax + by = c$ є вся площина xy. Якщо $a = b = 0$ і $c \neq 0$, то рівняння не має розв'язків.

Із курсу алгебри 7 класу ви знаєте, що рівняння виду $ax + by = c$ називають лінійним рівнянням з двома змінними. Рівняння прямої є окремим видом лінійного рівняння. Схема, зображена на рисунку 10.2, ілюструє сказане.

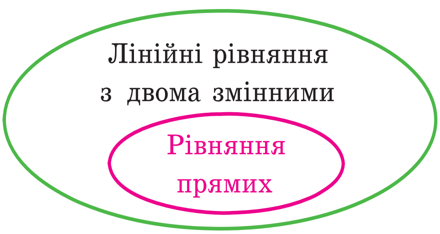


Рис. 10.2

Також на уроках алгебри в 7 класі ми прийняли без доведення той факт, що графіком лінійної функції $y = kx + p$ є пряма. Зараз ми можемо це довести.

Перепишемо рівняння $y = kx + p$ так: $-kx + y = p$. Ми отримали рівняння виду $ax + by = c$ для випадку, коли $a = -k$, $b = 1$, $c = p$. Оскільки в цьому рівнянні $b \neq 0$, то ми отримали рівняння прямої.

А чи будь-яку пряму на площині можна задати рівнянням виду $y = kx + p$? Відповідь на це запитання заперечна.

Річ у тім, що пряма, перпендикулярна до осі абсцис, не може бути графіком функції, а отже, не може бути задана рівнянням виду $y = kx + p$.

Разом з тим, якщо в рівнянні прямої $ax + by = c$ покласти $b = 0$, то його можна переписати так: $x = \frac{c}{a}$. Ми отримали окремий вид рівняння прямої, усі точки якої мають однакові абсциси. Отже, ця пряма перпендикулярна до осі абсцис. Її називають вертикальною.

Коли $b \neq 0$, то рівняння прямої $ax + by = c$ можна записати так: $y = -\frac{a}{b}x + \frac{c}{b}$. Позначивши $-\frac{a}{b} = k$, $\frac{c}{b} = p$, отримаємо рівняння $y = kx + p$.

Отже, ***якщо*** $b = 0$ **і** $a \neq 0$, ***то рівняння прямої*** $ax + by = c$ ***задає вертикальну пряму; якщо*** $b \neq 0$, ***то це рівняння задає невертикальну пряму***.

Рівняння невертикальної прямої зручно записувати у вигляді $y = kx + p$.

У наведеній таблиці узагальнено матеріал, розглянутий у цьому пункті.

Рівняння	Значення a, b і c	Графік
$ax + by = c$	$b \neq 0$, a і c — будь-які	Невертикальна пряма
	$b = 0$, $a \neq 0$, c — будь-яке	Вертикальна пряма
	$a = b = c = 0$	Уся координатна площина
	$a = b = 0$, $c \neq 0$	—

Задача 1. Складіть рівняння прямої, яка проходить через точки:

1) $A\ (-3;\ 5)$ і $B\ (-3;\ -6)$; 2) $C\ (6;\ 1)$ і $D\ (-18;\ -7)$.

Розв'язання. 1) Оскільки дані точки мають рівні абсциси, то пряма AB є вертикальною. Її рівняння має вигляд $x = -3$.

2) Оскільки дані точки мають різні абсциси, то пряма CD не є вертикальною. Тоді можна скористатися рівнянням прямої у вигляді $y = kx + p$.

Підставивши координати точок C і D у рівняння $y = kx + p$, отримуємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} 6k + p = 1, \\ -18k + p = -7. \end{cases}$$

Розв'язавши цю систему рівнянь, знаходимо, що $k = \frac{1}{3}$, $p = -1$.

Відповідь: 1) $x = -3$; 2) $y = \frac{1}{3}x - 1$. ◀

Задача 2. Знайдіть периметр і площу трикутника, обмеженого прямою $5x + 12y = -60$ та осями координат.

Розв'язання. Знайдемо точки перетину даної прямої з осями координат.

З віссю абсцис: при $y = 0$ отримуємо $5x = -60$; $x = -12$.

З віссю ординат: при $x = 0$ отримуємо $12y = -60$; $y = -5$.

Отже, дана пряма й осі координат обмежують прямокутний трикутник AOB (рис. 10.3) з вершинами A $(-12; 0)$, B $(0; -5)$ і O $(0; 0)$. Знайдемо сторони трикутника: $OA = 12$, $OB = 5$, $AB = \sqrt{AO^2 + BO^2} = 13$. Тоді шукані периметр і площа відповідно дорівнюють $P = OA + OB + AB = 30$, $S = \frac{1}{2} OA \cdot OB = 30$.

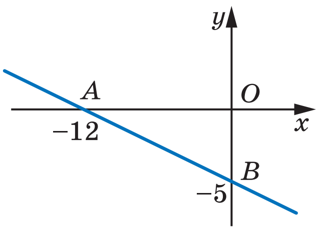


Рис. 10.3

Відповідь: $P = 30$, $S = 30$. ◀

1. Який вигляд має рівняння прямої на площині xy?
2. Як прийнято називати пряму, усі точки якої мають однакові абсциси? Як розташована ця пряма відносно осі абсцис?
3. Чи будь-яке лінійне рівняння з двома змінними є рівнянням прямої?
4. У якому вигляді зручно записувати рівняння невертикальної прямої?
5. Чи будь-яку пряму на площині можна задати рівнянням виду $y = kx + p$?
6. За якої умови рівняння прямої $ax + by = c$ є рівнянням вертикальної прямої? невертикальної прямої?

ВПРАВИ

10.1.° Які з даних рівнянь є рівняннями прямих:

1) $2x - 3y = 5$;	4) $2x = 5$;	7) $0x + 0y = 0$;
2) $2x - 3y = 0$;	5) $-3y = 5$;	8) $0x + 0y = 5$?
3) $2x^2 - 3y = 5$;	6) $2x + 0y = 0$;	

10.2.° Знайдіть координати точок перетину прямої $4x - 5y = 20$ з осями координат. Чи належить цій прямій точка:
1) A (10; 4); 2) B (6; 1); 3) C (−1,5; 5,2); 4) D (−1; 5)?

10.3.° Знайдіть координати точок перетину прямої $3x + 4y = 12$ з осями координат. Яка з точок M (−2; 4) і K (8; −3) належить цій прямій?

10.4.° Складіть рівняння прямої, яка проходить через точку A (6; −3) і перпендикулярна до осі x. Які координати має точка перетину цієї прямої з віссю x?

10.5.° Складіть рівняння прямої, яка проходить через точку B (5; −8) і перпендикулярна до осі y. Які координати має точка перетину цієї прямої з віссю y?

10.6.° Складіть рівняння прямої, яка проходить через точку C (−4; 9) паралельно: 1) осі абсцис; 2) осі ординат.

10.7.° Складіть рівняння прямої, яка проходить через точки:
1) A (1; −3) і B (−2; −9);
2) C (3; 5) і D (3; −10);
3) E (−4; −1) і F (9; −1);
4) M (3; −3) і K (−6; 12).

10.8.° Складіть рівняння прямої, яка проходить через точки:
1) A (2; −5) і B (−3; 10); 2) C (6; −1) і D (24; 2).

10.9.° Знайдіть координати точки перетину прямих:
1) $y = 3x - 7$ і $y = 5x + 9$; 2) $2x - 7y = -16$ і $6x + 11y = 16$.

10.10.° Знайдіть координати точки перетину прямих:
1) $y = -4x + 1$ і $y = 2x - 11$; 2) $3x + 2y = 10$ і $x - 8y = 12$.

10.11.• Точки A (−6; −1), B (1; 2) і C (−5; −8) — вершини трикутника ABC. Складіть рівняння прямої, яка містить медіану AK трикутника.

10.12.• Точки A (−3; −4), B (−2; 2), C (1; 3) і D (3; −2) — вершини трапеції $ABCD$ ($BC \parallel AD$). Складіть рівняння прямої, яка містить середню лінію трапеції.

10.13.• Абсциси середин бічних сторін трапеції рівні. Чи можна стверджувати, що основи трапеції перпендикулярні до осі абсцис?

10.14.• Знайдіть периметр трикутника, обмеженого осями координат і прямою $4x - 3y = 12$.

10.15.• Знайдіть площу трикутника, обмеженого осями координат і прямою $7y - 2x = 28$.

10.16.• Знайдіть площу трикутника, обмеженого прямими $3x + 2y = 6$ і $y = -\frac{9}{4}x$ та віссю ординат.

10.17.• Доведіть, що коло $(x - 5)^2 + (y - 5)^2 = 9$ і пряма $x + y = 7$ перетинаються, та знайдіть координати точок їхнього перетину.

10.18.• Доведіть, що пряма $x + y = 5$ є дотичною до кола $(x - 3)^2 + (y + 2)^2 = 8$, і знайдіть координати точки дотику.

10.19.• Доведіть, що коло $(x - 4)^2 + (y - 2)^2 = 1$ і пряма $3x + y = 3$ не мають спільних точок.

10.20.•• Знайдіть відстань від початку координат до прямої $5x - 2y = 10$.

10.21.•• Знайдіть відстань від початку координат до прямої $x + y = -8$.

10.22.•• Знайдіть довжину хорди кола $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 25$, яка лежить на прямій $y = 3x$.

10.23.•• Складіть рівняння геометричного місця центрів кіл, які проходять через точки A (1; −7) і B (−3; 5).

10.24.•• Складіть рівняння геометричного місця центрів кіл, які проходять через точки C (2; 3) і D (−5; −2).

10.25.•• Знайдіть координати точки, яка рівновіддалена від осей координат і від точки A (3; 6).

10.26.•• Знайдіть координати точки, яка рівновіддалена від осей координат і від точки B (−4; 2).

10.27.* Складіть рівняння кола, яке проходить через точки A (2; 0) та B (4; 0) і центр якого належить прямій $2x + 3y = 18$.

10.28.* Складіть рівняння геометричного місця центрів кіл, радіус яких дорівнює 5 та які відтинають на осі абсцис хорду завдовжки 6.

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

10.29. Діагоналі паралелограма дорівнюють $6\sqrt{2}$ см і 8 см, а кут між ними становить 45°. Знайдіть сторони паралелограма.

10.30. Одна зі сторін трикутника на 15 см більша за другу, а висота, проведена до третьої сторони, ділить її на відрізки завдовжки 32 см і 7 см. Знайдіть периметр трикутника.

10.31. Центр кола, описаного навколо рівнобічної трапеції, лежить на її більшій основі. Знайдіть радіус кола, якщо діагональ трапеції дорівнює 20 см, а висота — 12 см.

11. Кутовий коефіцієнт прямої

Розглянемо рівняння $y = kx$. Воно задає невертикальну пряму, яка проходить через початок координат.

Покажемо, що прямі $y = kx$ та $y = kx + b$, де $b \neq 0$, паралельні.

Точки O (0; 0) і C (1; k) належать прямій $y = kx$, а точки A (0; b) і B (1; $k + b$) належать прямій $y = kx + b$ (рис. 11.1). Легко переконатися (зробіть це самостійно), що середини діагоналей AC і OB чотирикутника $OABC$ збігаються. Отже, чотирикутник $OABC$ — паралелограм. Звідси $AB \parallel OC$.

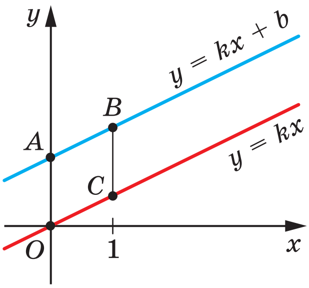


Рис. 11.1

Тепер ми можемо зробити такий висновок:

***якщо $k_1 = k_2$ і $b_1 \neq b_2$, то прямі $y = k_1x + b_1$ і $y = k_2x + b_2$ паралельні* (1).**

Нехай пряма $y = kx$ перетинає одиничне півколо в точці M (x_0; y_0) (рис. 11.2). Кут AOM називають **кутом між даною прямою та додатним напрямом осі абсцис**.

Якщо пряма $y = kx$ збігається з віссю абсцис, то кут між цією прямою та додатним напрямом осі абсцис вважають рівним 0°.

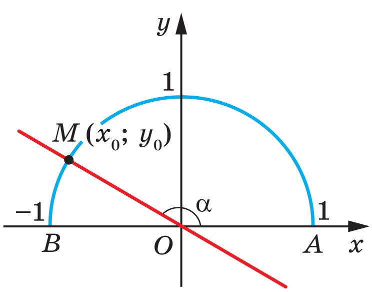


Рис. 11.2

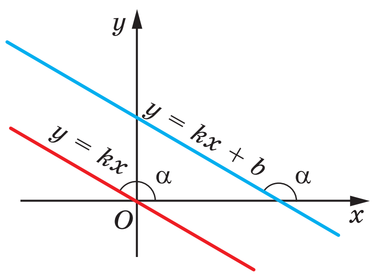


Рис. 11.3

Якщо пряма $y = kx$ утворює з додатним напрямом осі абсцис кут α, то вважають, що й пряма $y = kx + b$, яка паралельна прямій $y = kx$, також утворює кут α з додатним напрямом осі абсцис (рис. 11.3).

Розглянемо пряму MO, рівняння якої має вигляд $y = kx$ (рис. 11.2). Якщо $\angle MOA = \alpha$, то $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{y_0}{x_0}$. Оскільки точка $M(x_0; y_0)$ належить прямій $y = kx$, то $\frac{y_0}{x_0} = k$. Звідси $k = \operatorname{tg}\alpha$.

Таким чином, для прямої $y = kx + b$ отримуємо, що

$$\boxed{k = \operatorname{tg}\alpha,}$$

де α — кут, який утворює ця пряма з додатним напрямом осі абсцис. Тому коефіцієнт k називають **кутовим коефіцієнтом** цієї прямої.

Коли невертикальні прямі паралельні, то вони утворюють рівні кути з додатним напрямом осі абсцис. Тоді тангенси цих кутів рівні, отже, рівні і їхні кутові коефіцієнти.

Таким чином,

якщо прямі $y = k_1x + b_1$ і $y = k_2x + b_2$ паралельні, то $k_1 = k_2$ (2).

Висновки (1) і (2) об'єднаємо в одну теорему.

Теорема 11.1. ***Прямі $y = k_1x + b_1$ і $y = k_2x + b_2$ є паралельними тоді й тільки тоді, коли $k_1 = k_2$ і $b_1 \neq b_2$.***

Задача. Складіть рівняння прямої, яка проходить через точку $A(-4; 3)$ і паралельна прямій $y = 0{,}5x - 4$.

Розв'язання. Нехай рівняння шуканої прямої $y = kx + p$. Оскільки ця пряма й пряма $y = 0{,}5x - 4$ паралельні, то їхні кутові коефіцієнти рівні, тобто $k = 0{,}5$.

Отже, шукане рівняння має вигляд $y = 0{,}5x + p$. Ураховуючи, що дана пряма проходить через точку $A(-4; 3)$, отримуємо: $0{,}5 \cdot (-4) + p = 3$. Звідси $p = 5$.

Шукане рівняння має вигляд $y = 0{,}5x + 5$.

Відповідь: $y = 0{,}5x + 5$. ◄

?

1. Поясніть, що називають кутом між прямою та додатним напрямом осі абсцис.
2. Чому вважають рівним кут між прямою, яка паралельна осі абсцис або збігається з нею, та додатним напрямом осі абсцис?
3. Що називають кутовим коефіцієнтом прямої?
4. Як пов'язані кутовий коефіцієнт прямої та кут між прямою й додатним напрямом осі абсцис?

5. Сформулюйте необхідну і достатню умову паралельності двох невертикальних прямих на координатній площині.

ВПРАВИ

11.1.° Чому дорівнює кутовий коефіцієнт прямої:
1) $y = 2x - 7$; 3) $y = x + 10$; 5) $y = 4$;
2) $y = -3x$; 4) $y = 5 - x$; 6) $3x - 2y = 4$?

11.2.° Які з прямих $y = 6x - 5$, $y = 0{,}6x + 1$, $y = \frac{3}{5}x + 4$, $y = 2 - 6x$ і $y = 600 + 0{,}6x$ паралельні?

11.3.° Яке число треба підставити замість зірочки, щоби були паралельними прямі:
1) $y = 8x - 14$ і $y = {*}x + 2$;
2) $y = {*}x - 1$ і $y = 3 - 4x$?

11.4.° Складіть рівняння прямої, що проходить через початок координат і паралельна прямій:
1) $y = 14x - 11$; 2) $y = -1{,}15x + 2$.

11.5.• Складіть рівняння прямої, яка проходить через точку $A\ (-3;\ 7)$ і кутовий коефіцієнт якої дорівнює:
1) 4; 2) -3; 3) 0.

11.6.• Складіть рівняння прямої, яка проходить через точку $B\ (2;\ -5)$ і кутовий коефіцієнт якої дорівнює $-0{,}5$.

11.7.• Складіть рівняння прямої, яка проходить через точку $M\ (-1;\ 9)$ і паралельна прямій:
1) $y = -7x + 3$; 2) $3x - 4y = -8$.

11.8.• Складіть рівняння прямої, яка проходить через точку $K\left(-\frac{1}{3};\ 10\right)$ і паралельна прямій:
1) $y = 9x - 16$; 2) $6x + 2y = 7$.

11.9.• Складіть рівняння прямої, яка проходить через точку $A\ (2;\ 6)$ та утворює з додатним напрямом осі абсцис кут:
1) $60°$; 2) $120°$.

11.10.• Складіть рівняння прямої, яка проходить через точку $B\ (3;\ -2)$ та утворює з додатним напрямом осі абсцис кут:
1) $45°$; 2) $135°$.

11.11.• Складіть рівняння прямої, зображеної на рисунку 11.4.

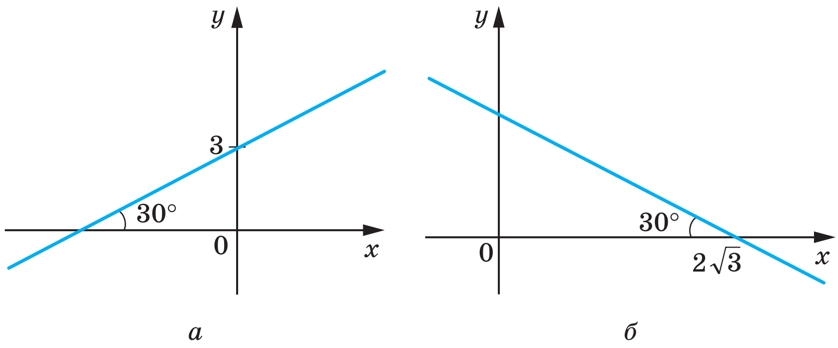


Рис. 11.4

11.12.• Визначте, чи паралельні прямі:
1) $2x - 5y = 9$ і $5y - 2x = 1$; 3) $7x - 2y = 12$ і $7x - 3y = 12$;
2) $8x + 12y = 15$ і $4x + 6y = 9$; 4) $3x + 2y = 3$ і $6x + 4y = 6$.

11.13.• Доведіть, що прямі $7x - 6y = 3$ і $6y - 7x = 6$ паралельні.

11.14.•• Складіть рівняння прямої, яка паралельна прямій $y = 4x + 2$ і перетинає пряму $y = -8x + 9$ у точці, що належить осі ординат.

11.15.•• Складіть рівняння прямої, яка паралельна прямій $y = 3x + 4$ і перетинає пряму $y = -4x + 16$ у точці, що належить осі абсцис.

11.16.* Складіть рівняння прямої, яка перпендикулярна до прямої $y = -x + 3$ і проходить через точку A (1; 5).

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

11.17. В опуклому чотирикутнику $ABCD$ бісектриси кутів A і B перетинаються в точці O (рис. 11.5). Доведіть, що кут AOB дорівнює півсумі кутів C і D.

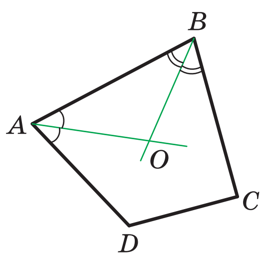


Рис. 11.5

11.18. Висота ромба, проведена з вершини його тупого кута, ділить сторону ромба на відрізки 7 см і 18 см, рахуючи від вершини гострого кута. Знайдіть діагоналі ромба.

11.19. Медіани рівнобедреного трикутника дорівнюють 15 см, 15 см і 18 см. Знайдіть площу трикутника.

СПОСТЕРІГАЙТЕ, РИСУЙТЕ, КОНСТРУЮЙТЕ, ФАНТАЗУЙТЕ

11.20. Якого найменшого значення може набувати радіус круга, з якого можна вирізати трикутник зі сторонами 2 см, 3 см, 4 см?

МЕТОД КООРДИНАТ

Ми часто говоримо: пряма $y = 2x - 1$, парабола $y = x^2$, коло $x^2 + y^2 = 1$, тим самим ототожнюючи фігуру з її рівнянням. Такий підхід дає змогу зводити задачу про пошук властивостей фігури до задачі про дослідження її рівняння. У цьому й полягає суть методу координат.

Проілюструємо сказане на такому прикладі.

Із наочних міркувань очевидно, що пряма й коло мають не більше двох спільних точок. Проте це твердження не є аксіомою, тому його потрібно доводити.

Ця задача зводиться до дослідження кількості розв'язків системи рівнянь

$$\begin{cases} ax + by = c, \\ (x - m)^2 + (y - n)^2 = R^2, \end{cases}$$

де числа a і b одночасно не дорівнюють нулю і $R > 0$.

Розв'язуючи цю систему методом підстановки, ми отримаємо квадратне рівняння, яке може мати два розв'язки, один розв'язок або взагалі не мати розв'язків. Отже, для даної системи існує три можливих випадки:

1) система має два розв'язки — пряма й коло перетинаються у двох точках;
2) система має один розв'язок — пряма дотикається до кола;
3) система не має розв'язків — пряма й коло не мають спільних точок.

З кожним із цих випадків ви зустрічалися, розв'язуючи задачі 10.17–10.19.

Метод координат є особливо ефективним у тих випадках, коли потрібно знайти фігуру, усім точкам якої притаманна задана властивість, тобто знайти ГМТ.

Позначимо на площині дві точки A і B. Ви добре знаєте, якою фігурою є геометричне місце точок M таких, що $\frac{MA}{MB} = 1$.

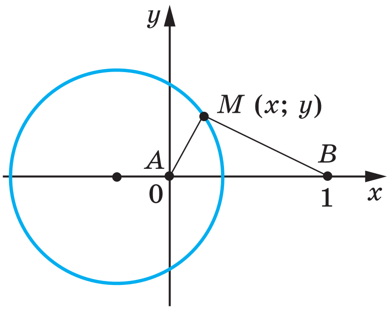


Рис. 11.6

Це серединний перпендикуляр відрізка AB. Цікаво з'ясувати, яку фігуру утворюють усі точки M, для яких $\frac{MA}{MB} = k$, де $k \neq 1$. Розв'яжемо цю задачу для $k = \frac{1}{2}$.

Площину, на якій позначено точки A і B, «перетворимо» в координатну. Зробимо це так: за початок відліку виберемо точку A, за одиничний відрізок — відрізок AB, вісь абсцис проведемо так, щоб точка B мала координати (1; 0) (рис. 11.6).

Нехай $M (x; y)$ — довільна точка шуканої фігури F. Тоді $2MA = MB$; $4MA^2 = MB^2$. Звідси

$$4(x^2 + y^2) = (x - 1)^2 + y^2;$$

$$3x^2 + 2x + 3y^2 = 1;$$

$$x^2 + \frac{2}{3}x + y^2 = \frac{1}{3};$$

$$x^2 + \frac{2}{3}x + \frac{1}{9} + y^2 = \frac{4}{9};$$

$$\left(x + \frac{1}{3}\right)^2 + y^2 = \frac{4}{9}. \qquad (*)$$

Отже, якщо точка $M (x; y)$ належить фігурі F, то її координати є розв'язком рівняння (*).

Нехай $(x_1; y_1)$ — деякий розв'язок рівняння (*). Тоді легко показати, що $4(x_1^2 + y_1^2) = (x_1 - 1)^2 + y_1^2$. А це означає, що точка $N (x_1; y_1)$ є такою, що $4NA^2 = NB^2$. Тоді $2NA = NB$. Отже, точка N належить фігурі F.

Таким чином, рівнянням фігури F є рівняння (*), тобто фігура F — це коло із центром у точці $O\left(-\frac{1}{3};\ 0\right)$ і радіусом $\frac{2}{3}$.

Ми розв'язали задачу для окремого випадку, коли $k = \frac{1}{2}$. Можна показати, що шуканою фігурою для будь-якого додатного $k \neq 1$ буде коло. Це коло називають **колом Аполлонія**[1].

[1] Аполлоній Пергський (III–II ст. до н. е.) — давньогрецький математик і астроном.

ЯК БУДУВАЛИ МІСТ МІЖ ГЕОМЕТРІЄЮ ТА АЛГЕБРОЮ

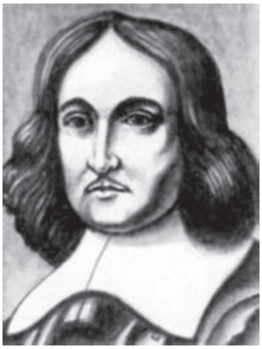
Ідея координат зародилася дуже давно. Адже ще в давнину люди вивчали Землю, спостерігали зорі, а за результатами своїх досліджень складали карти, схеми.

У II ст. до н. е. давньогрецький учений Гіппарх уперше використав ідею координат для визначення місця розташування об'єктів на поверхні Землі.

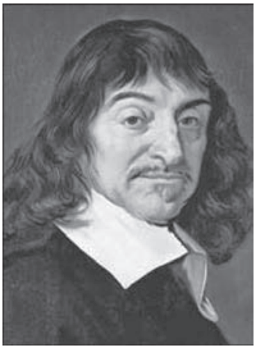
Лише в XIV ст. французький учений Нікола Орем (близько 1323–1382) уперше застосував у математиці ідею Гіппарха: він розбив площину на клітинки (як розбито аркуш вашого зошита) і почав задавати положення точок широтою й довготою.

Однак величезні можливості застосування цієї ідеї були розкриті лише в XVII ст. у роботах видатних французьких математиків П'єра Ферма і Рене Декарта. У своїх працях ці вчені показали, як завдяки системі координат можна переходити від точок до чисел, від ліній до рівнянь, від геометрії до алгебри.

Попри те що П. Ферма опублікував свою роботу на рік раніше за Р. Декарта, систему координат, якою ми сьогодні користуємося, називають **декартовою**. Р. Декарт у своїй роботі «Міркування про метод» запропонував нову зручну буквену символіку, якою з незначними змінами ми користуємося й сьогодні. Слідом за Декартом ми позначаємо змінні останніми буквами латинського алфавіту x, y, z, а коефіцієнти — першими: a, b, c, ... Звичні нам позначення степенів x^2, y^3, z^5 і т. д. також увів Р. Декарт.



П'єр Ферма
(1601–1665)



Рене Декарт
(1596–1650)

ЗАВДАННЯ № 3 «ПЕРЕВІРТЕ СЕБЕ» В ТЕСТОВІЙ ФОРМІ

1. Які координати має середина відрізка AB, якщо $A\ (-6;\ 7)$, $B\ (4;\ -9)$?

А) $(-5;\ 8)$;	В) $(-5;\ -1)$;
Б) $(-1;\ -1)$;	Г) $(-1;\ 8)$.

2. Чому дорівнює відстань між точками $C\ (8;\ -11)$ і $D\ (2;\ -3)$?

А) 100;	В) $\sqrt{296}$;
Б) 10;	Г) $\sqrt{164}$.

3. Які координати має центр кола $(x-5)^2+(y+9)^2=16$?

А) $(5;\ -9)$;	В) $(5;\ 9)$;
Б) $(-5;\ 9)$;	Г) $(-5;\ -9)$.

4. Центром якого з даних кіл є початок координат?

А) $x^2+(y-1)^2=1$;	В) $x^2+y^2=1$;
Б) $(x-1)^2+y^2=1$;	Г) $(x-1)^2+(y-1)^2=1$.

5. Знайдіть радіус кола, діаметром якого є відрізок MK, якщо $M\ (14;\ 12)$ і $K\ (-10;\ 2)$.

А) 26;	В) 25;
Б) 13;	Г) 5.

6. Які координати точки перетину прямої $5x-3y=15$ з віссю абсцис?

А) $(0;\ -5)$;	В) $(0;\ 3)$;
Б) $(-5;\ 0)$;	Г) $(3;\ 0)$.

7. Чотирикутник $ABCD$ — паралелограм. Задано три його вершини: $B\ (-2;\ 3)$, $C\ (10;\ 9)$, $D\ (7;\ 0)$. Знайдіть координати вершини A.

А) $(1;\ 6)$;	В) $(-5;\ -6)$;
Б) $(19;\ -3)$;	Г) $(6;\ 5)$.

8. Які координати має точка осі ординат, рівновіддалена від точок $A\ (-3;\ 4)$ і $B\ (1;\ 8)$?

А) $(-5;\ 0)$;	В) $(5;\ 0)$;
Б) $(0;\ -5)$;	Г) $(0;\ 5)$.

9. Знайдіть абсцису точки прямої AB, ордината якої дорівнює 2, якщо $A\ (-7;\ 4)$, $B\ (9;\ 12)$.

А) 8,5;	В) 4;
Б) -11;	Г) -2.

10. Чому дорівнює відстань між точкою перетину прямих $x - y = 4$ і $x + 3y = 12$ та точкою M (1; 7)?

А) 5;
Б) 50;
В) $5\sqrt{2}$;
Г) $2\sqrt{5}$.

11. Яким є рівняння прямої, що проходить через точку P (−1; 6) паралельно прямій $y = 2x - 5$?

А) $y = 6 - 5x$;
Б) $y = 2x + 8$;
В) $y = 5x - 6$;
Г) $y = 2x - 8$.

12. Чому дорівнює радіус кола $x^2 + y^2 + 14y - 12x + 78 = 0$?

А) $\sqrt{7}$;
Б) 7;
В) 14;
Г) $\sqrt{14}$.

ГОЛОВНЕ В ПАРАГРАФІ 3

Відстань між двома точками

Відстань між точками $A\ (x_1;\ y_1)$ і $B\ (x_2;\ y_2)$ можна знайти за формулою $AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$.

Координати середини відрізка

Координати $(x_0;\ y_0)$ середини відрізка з кінцями $(x_1;\ y_1)$ і $(x_2;\ y_2)$ можна знайти за формулами:

$$x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2},\quad y_0 = \frac{y_1 + y_2}{2}.$$

Рівняння фігури

Рівнянням фігури F, заданої на площині xy, називають рівняння з двома змінними x і y, яке має такі властивості:

1) якщо точка належить фігурі F, то її координати є розв'язком даного рівняння;
2) будь-який розв'язок $(x;\ y)$ даного рівняння є координатами точки, яка належить фігурі F.

Рівняння кола

Рівняння кола радіуса R із центром у точці $A\ (a;\ b)$ має вигляд $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$.

Будь-яке рівняння виду $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$, де a, b і R — деякі числа, причому $R > 0$, є рівнянням кола радіуса R із центром у точці з координатами $(a;\ b)$.

Рівняння прямої

Рівняння прямої має вигляд $ax + by = c$, де a, b і c — деякі числа, причому a і b не дорівнюють нулю одночасно.

Будь-яке рівняння виду $ax + by = c$, де a, b і c — деякі числа, причому a і b не дорівнюють нулю одночасно, є рівнянням прямої.

Якщо $b = 0$ і $a \neq 0$, то рівняння прямої $ax + by = c$ задає вертикальну пряму; якщо $b \neq 0$, то це рівняння задає невертикальну пряму.

Кутовий коефіцієнт прямої

Коефіцієнт k у рівнянні прямої $y = kx + b$ називають кутовим коефіцієнтом прямої, і він дорівнює тангенсу кута, який утворює ця пряма з додатним напрямом осі абсцис.

Необхідна і достатня умова паралельності невертикальних прямих

Прямі $y = k_1x + b_1$ і $y = k_2x + b_2$ є паралельними тоді й тільки тоді, коли $k_1 = k_2$ і $b_1 \neq b_2$.

ВЕКТОРИ §4

Вивчаючи матеріал цього параграфа, ви дізнаєтеся, що вектори використовують не тільки у фізиці, а й у геометрії.

Ви навчитеся додавати й віднімати вектори, множити вектор на число, знаходити кут між двома векторами, застосовувати властивості векторів для розв'язування задач.

12. Поняття вектора

Ви знаєте багато величин, які визначаються своїми числовими значеннями: маса, площа, довжина, об'єм, час, температура тощо. Такі величини називають **скалярними величинами** або **скалярами**.

Із курсу фізики вам відомі величини, для задання яких недостатньо знати тільки їхні числові значення. Наприклад, якщо на пружину діє сила 5 Н, то не зрозуміло, чи буде пружина стискатися або розтягуватися (рис. 12.1). Потрібно ще знати, у якому напрямі діє сила.

Рис. 12.1

Величини, які визначаються не тільки числовим значенням, але й напрямом, називають **векторними величинами** або **векторами**[1].

Сила, переміщення, швидкість, прискорення, вага — приклади векторних величин.

Є вектори й у геометрії.

[1] Термін «вектор» уперше з'явився в 1845 р., його ввів у вжиток ірландський математик і астроном В. Гамільтон.

Розглянемо відрізок AB. Якщо ми домовимося точку A вважати **початком** відрізка, а точку B — його **кінцем**, то такий відрізок буде характеризуватися не тільки довжиною, але й напрямом від точки A до точки B.

Якщо вказано, яка точка є початком відрізка, а яка точка — його кінцем, то такий відрізок називають **напрямленим відрізком** або **вектором**.

Вектор з початком у точці A та кінцем у точці B позначають так: $\overrightarrow{AB}$ (читають: «вектор AB»).

На рисунках вектор зображають відрізком зі стрілкою, яка вказує його кінець. На рисунку 12.2 зображено вектори $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$ і $\overrightarrow{MN}$.

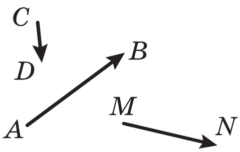


Рис. 12.2

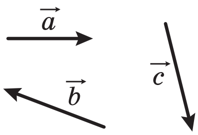


Рис. 12.3

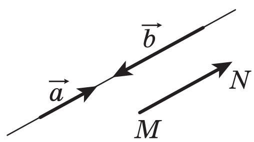


Рис. 12.4

Для позначення векторів також використовують малі букви латинського алфавіту зі стрілкою зверху. На рисунку 12.3 зображено вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$.

Вектор, у якого початок і кінець — одна й та сама точка, називають **нульовим вектором** або **нуль-вектором** і позначають $\vec{0}$. Якщо початок і кінець нульового вектора — це точка A, то його можна позначити й так: $\overrightarrow{AA}$. На рисунку нульовий вектор зображають точкою.

Модулем вектора $\overrightarrow{AB}$ називають довжину відрізка AB. Модуль вектора $\overrightarrow{AB}$ позначають так: $|\overrightarrow{AB}|$, а модуль вектора $\vec{a}$ — так: $|\vec{a}|$.

Модуль нульового вектора вважають рівним нулю: $|\vec{0}| = 0$.

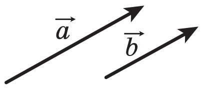
Означення. **Ненульові вектори називають колінеарними, якщо вони лежать на паралельних прямих або на одній прямій.**

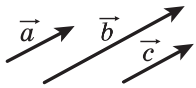
Нульовий вектор вважають колінеарним будь-якому вектору.

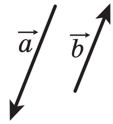
На рисунку 12.4 зображено колінеарні вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\overrightarrow{MN}$.

Той факт, що вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ колінеарні, позначають так: $\vec{a} \parallel \vec{b}$.

На рисунку 12.5 ненульові колінеарні вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ однаково напрямлені. Такі вектори називають **співнапрямленими** й пишуть: $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$.







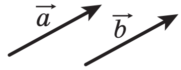


Рис. 12.5 **Рис. 12.6** **Рис. 12.7** **Рис. 12.8**

Якщо $\vec{a} \parallel \vec{b}$ ***і*** $\vec{b} \parallel \vec{c}$, ***то*** $\vec{a} \parallel \vec{c}$.

Аналогічну властивість мають і співнапрямлені вектори, тобто ***якщо*** $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$ ***і*** $\vec{b} \uparrow\uparrow \vec{c}$, ***то*** $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{c}$ (рис. 12.6).

На рисунку 12.7 ненульові колінеарні вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ **протилежно напрямлені**. Цей факт позначають так: $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$.

Означення. Ненульові вектори називають рівними, якщо їхні модулі рівні й вони співнапрямлені. Будь-які два нульових вектори рівні.

На рисунку 12.8 зображено рівні вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$. Це позначають так: $\vec{a} = \vec{b}$.

Рівність ненульових векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ означає, що $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$ і $|\vec{a}| = |\vec{b}|$.

Неважко довести, що коли $\vec{a} = \vec{b}$ і $\vec{b} = \vec{c}$, то $\vec{a} = \vec{c}$. Переконайтеся в цьому самостійно.

Часто, говорячи про вектори, ми не конкретизуємо, яка точка є початком вектора. Так, на рисунку 12.9 зображено вектор $\vec{a}$ та вектори, рівні вектору $\vec{a}$. Кожний із них також прийнято називати вектором $\vec{a}$.

На рисунку 12.10, *а* зображено вектор $\vec{a}$ та точку A. Якщо побудовано вектор $\overrightarrow{AB}$, рівний вектору $\vec{a}$, то говорять, що вектор $\vec{a}$ **відкладено від точки** A (рис. 12.10, *б*).

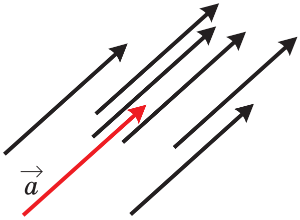
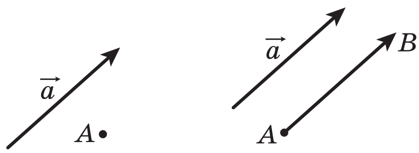


Рис. 12.9



а *б*

Рис. 12.10

Покажемо, як від довільної точки M відкласти вектор, рівний даному вектору $\vec{a}$.

Якщо вектор $\vec{a}$ нульовий, то шуканим вектором буде вектор $\overrightarrow{MM}$.

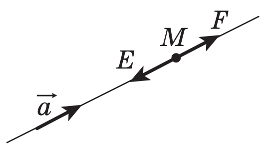


Рис. 12.11

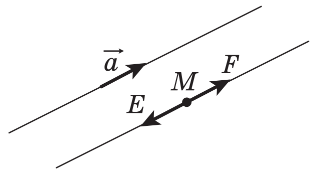


Рис. 12.12

Тепер розглянемо випадок, коли $\vec{a} \neq \vec{0}$. Нехай точка M лежить на прямій, яка містить вектор $\vec{a}$ (рис. 12.11). На цій прямій існують дві точки E і F такі, що $ME = MF = |\vec{a}|$. На вказаному рисунку вектор $\overrightarrow{MF}$ дорівнюватиме вектору $\vec{a}$. Його й потрібно вибрати.

Якщо точка M не належить прямій, яка містить вектор $\vec{a}$, то через точку M проведемо пряму, їй паралельну (рис. 12.12). Подальша побудова аналогічна вже розглянутій.

Від заданої точки можна відкласти тільки один вектор, рівний даному.

Задача. Дано чотирикутник $ABCD$. Відомо, що $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ і $|\overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{BD}|$. Визначте вид чотирикутника $ABCD$.

Розв'язання. З умови $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ випливає, що $AB \parallel DC$ і $AB = DC$. Отже, чотирикутник $ABCD$ — паралелограм.

Рівність $|\overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{BD}|$ означає, що діагоналі чотирикутника $ABCD$ рівні. А паралелограм з рівними діагоналями є прямокутником. ◄

?

1. Наведіть приклади скалярних величин.
2. Які величини називають векторними?
3. Що в геометрії називають векторами?
4. Які з величин є векторними: час, вага, прискорення, імпульс, маса, переміщення, шлях, площа, тиск?
5. Який відрізок називають напрямленим відрізком або вектором?

6. Як позначають вектор з початком у точці A та кінцем у точці B?
7. Який вектор називають нульовим?
8. Що називають модулем вектора $\overrightarrow{AB}$?
9. Чому дорівнює модуль нульового вектора?
10. Які вектори називають колінеарними?
11. Як позначають співнапрямлені вектори? протилежно напрямлені вектори?
12. Які вектори називають рівними?

ПРАКТИЧНІ ЗАВДАННЯ

12.1.° Позначте три точки A, B і C, які не лежать на одній прямій. Накресліть вектори $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BA}$ і $\overrightarrow{CB}$.

12.2. Катер із точки A перемістився на північ на 40 км у точку B, а потім на захід на 60 км із точки B у точку C. Вибравши масштаб, накресліть вектори, які зображають переміщення з точки A в точку B, із точки B у точку C, із точки A в точку C.

12.3.° Накресліть трикутник ABC. Накресліть вектор, співнапрямлений із вектором $\overrightarrow{CA}$, початком якого є точка B.

12.4.° Дано вектор $\vec{a}$ та точку A (рис. 12.13). Відкладіть від точки A вектор, рівний вектору $\vec{a}$.

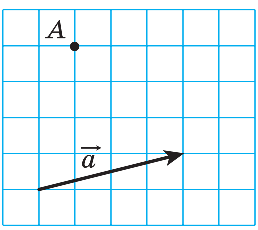


Рис. 12.13

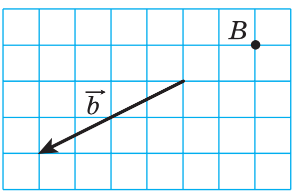


Рис. 12.14

12.5.° Дано вектор $\vec{b}$ і точку B (рис. 12.14). Відкладіть від точки B вектор, рівний вектору $\vec{b}$.

12.6.° Позначте точки A і B. Накресліть вектор $\overrightarrow{BC}$, рівний вектору $\overrightarrow{AB}$.

12.7.° Накресліть вектор $\vec{a}$ та позначте точки M і N. Відкладіть від цих точок вектори, рівні вектору $\vec{a}$.

12.8.• Накресліть трикутник ABC і позначте точку M — середину сторони BC. Від точки M відкладіть вектор, рівний вектору $\overrightarrow{AM}$, а від точки B — вектор, рівний вектору $\overrightarrow{AC}$. Доведіть, що кінці побудованих векторів збігаються.

12.9.• Накресліть трикутник ABC. Від точок B і C відкладіть вектори, відповідно рівні векторам $\overrightarrow{AC}$ і $\overrightarrow{AB}$. Доведіть, що кінці побудованих векторів збігаються.

ВПРАВИ

12.10.° Укажіть рівні вектори, початки й кінці яких знаходяться у вершинах квадрата $ABCD$.

12.11.° У ромбі $ABCD$ діагоналі перетинаються в точці O. Укажіть рівні вектори, початки й кінці яких знаходяться у точках A, B, C, D і O.

12.12.° Які з векторів, зображених на рисунку 12.15:

1) рівні;
2) співнапрямлені;
3) протилежно напрямлені;
4) колінеарні?

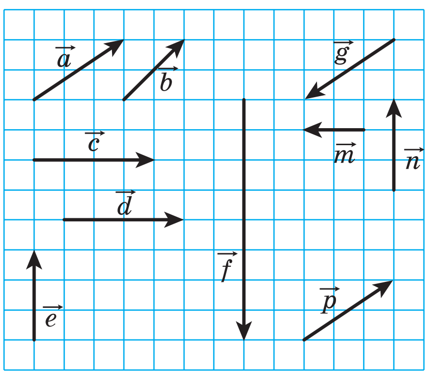


Рис. 12.15

12.13.° Точки M і N — відповідно середини сторін AB і CD паралелограма $ABCD$. Укажіть вектори, початки й кінці яких знаходяться в точках A, B, C, D, M і N:

1) рівні вектору $\overrightarrow{AM}$;

2) колінеарні вектору $\overrightarrow{CD}$;

3) протилежно напрямлені з вектором $\overrightarrow{NC}$;

4) співнапрямлені з вектором $\overrightarrow{BC}$.

12.14.° Нехай O — точка перетину діагоналей паралелограма $ABCD$. Укажіть вектори, початки й кінці яких знаходяться в точках A, B, C, D і O:

1) рівні;
2) співнапрямлені;
3) протилежно напрямлені.

12.15.° Точки M, N і P — відповідно середини сторін AB, BC і CA трикутника ABC. Укажіть вектори, початки й кінці яких знаходяться в точках A, B, C, M, N і P:

1) рівні вектору $\overrightarrow{MN}$;

2) колінеарні вектору $\overrightarrow{AB}$;

3) протилежно напрямлені з вектором $\overrightarrow{MP}$;

4) співнапрямлені з вектором $\overrightarrow{CA}$.

12.16.° Чи є правильним твердження:

1) якщо $\vec{m} = \vec{n}$, то $|\vec{m}| = |\vec{n}|$;

2) якщо $\vec{m} = \vec{n}$, то $\vec{m} \parallel \vec{n}$;

3) якщо $\vec{m} \neq \vec{n}$, то $|\vec{m}| \neq |\vec{n}|$?

12.17.° Доведіть, що коли чотирикутник $ABCD$ — паралелограм, то $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.

12.18.° Визначте вид чотирикутника $ABCD$, якщо $\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{DC}$ і $\overrightarrow{BC} \parallel \overrightarrow{DA}$.

12.19.° Визначте вид чотирикутника $ABCD$, якщо вектори $\overrightarrow{BC}$ і $\overrightarrow{AD}$ колінеарні і $|\overrightarrow{BC}| \neq |\overrightarrow{AD}|$.

12.20.° Знайдіть модулі векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ (рис. 12.16), якщо сторона клітинки дорівнює 0,5 см.

12.21.° У прямокутнику $ABCD$ відомо, що $AB = 6$ см, $BC = 8$ см, O — точка перетину діагоналей. Знайдіть модулі векторів $\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{BO}$ і $\overrightarrow{OC}$.

12.22.° У прямокутнику $ABCD$ діагоналі перетинаються в точці O. Відомо, що $|\overrightarrow{AB}| = 5$ см, $|\overrightarrow{AO}| = 6{,}5$ см. Знайдіть модулі векторів $\overrightarrow{BD}$ і $\overrightarrow{AD}$.

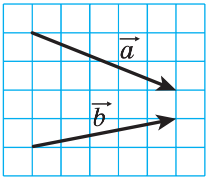


Рис. 12.16

12.23.° Відомо, що $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$. Чи можна стверджувати, що точки A, B, C і D є вершинами паралелограма?

12.24.° Відомо, що $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$. Які ще рівні вектори задають точки A, B, C і D?

12.25.° Дано чотирикутник $ABCD$. Відомо, що $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ і $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{BC}|$. Визначте вид чотирикутника $ABCD$.

12.26.° Дано чотирикутник $ABCD$. Відомо, що вектори $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{CD}$ колінеарні та $|\overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{BD}|$. Визначте вид чотирикутника $ABCD$.

12.27.° Що можна сказати про вектор $\overrightarrow{AB}$, якщо $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BA}$?

12.28.• У прямокутному трикутнику ABC точка M — середина гіпотенузи AB і $\angle B = 30°$. Знайдіть модулі векторів $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{MC}$, якщо $AC = 2$ см.

12.29.• У прямокутному трикутнику ABC ($\angle C = 90°$) медіана CM дорівнює 6 см. Знайдіть модулі векторів $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{AC}$, якщо $\angle A = 30°$.

12.30.• Відомо, що вектори $\vec{b}$ і $\vec{c}$ неколінеарні. Вектор $\vec{a}$ колінеарний кожному з векторів $\vec{b}$ і $\vec{c}$. Доведіть, що вектор $\vec{a}$ є нульовим.

12.31.• Відомо, що вектори $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{AC}$ колінеарні. Доведіть, що точки A, B і C лежать на одній прямій. Чи є правильним обернене твердження: якщо точки A, B і C лежать на одній прямій, то вектори $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{AC}$ колінеарні?

12.32.• Для чотирьох точок A, B, C і D відомо, що $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$. Доведіть, що середини відрізків AD і BC збігаються. Доведіть обернене твердження: якщо середини відрізків AD і BC збігаються, то $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.

12.33.• Відомо, що $\overrightarrow{MO} = \overrightarrow{ON}$. Доведіть, що точка O — середина відрізка MN. Доведіть обернене твердження: якщо точка O — середина відрізка MN, то $\overrightarrow{MO} = \overrightarrow{ON}$.

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

12.34. Один із кутів паралелограма дорівнює півсумі трьох інших його кутів. Знайдіть кути паралелограма.

12.35. Периметр одного з двох подібних трикутників на 8 см більший за периметр другого трикутника. Знайдіть периметри даних трикутників, якщо коефіцієнт подібності дорівнює $\frac{1}{3}$.

12.36. На сторонах BC і AD ромба $ABCD$ позначено відповідно точки M і K такі, що $BM : MC = KD : AK = 1 : 2$. Знайдіть відрізок MK, якщо $AB = a$, $\angle ABC = 60°$.

13. Координати вектора

Розглянемо на координатній площині вектор $\vec{a}$. Відкладемо від початку координат рівний йому вектор $\overrightarrow{OA}$ (рис. 13.1). **Координатами вектора** $\vec{a}$ називають координати точки A. Запис $\vec{a}(x; y)$ означає, що вектор $\vec{a}$ має координати $(x; y)$.

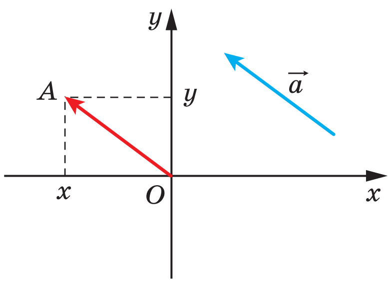


Рис. 13.1

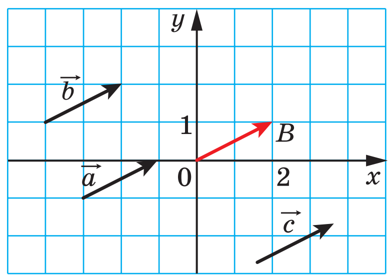


Рис. 13.2

Числа x і y називають відповідно **першою** та **другою координатами вектора** $\vec{a}$.

З означення випливає, що ***рівні вектори мають рівні відповідні координати***. Наприклад, кожний із рівних векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$ (рис. 13.2) має координати (2; 1).

Справедливе й обернене твердження: ***якщо відповідні координати векторів рівні, то рівні й самі вектори***.

Справді, якщо відкласти такі вектори від початку координат, то їхні кінці збігатимуться.

Очевидно, що нульовий вектор має координати (0; 0).

Теорема 13.1. ***Якщо точки $A(x_1; y_1)$ і $B(x_2; y_2)$ відповідно є початком і кінцем вектора $\vec{a}$, то числа $x_2 - x_1$ і $y_2 - y_1$ дорівнюють відповідно першій і другій координатам вектора $\vec{a}$.***

Доведення. Нехай вектор $\vec{a}$, рівний вектору $\overrightarrow{AB}$, має координати $(a_1; a_2)$. Доведемо, що $a_1 = x_2 - x_1$, $a_2 = y_2 - y_1$.

Якщо $\vec{a} = \vec{0}$, то твердження теореми є очевидним.

Нехай $\vec{a} \neq \vec{0}$. Відкладемо від початку координат вектор $\overrightarrow{OM}$, рівний вектору $\overrightarrow{AB}$. Тоді координати точки M дорівнюють $(a_1; a_2)$.

Оскільки $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OM}$, то, скориставшися результатом задачі 12.32, можемо зробити висновок, що середини відрізків OB і AM збігаються. Координати середин відрізків OB і AM відповідно дорівнюють $\left(\frac{0 + x_2}{2}; \frac{0 + y_2}{2}\right)$ і $\left(\frac{x_1 + a_1}{2}; \frac{y_1 + a_2}{2}\right)$. Тоді $\frac{0 + x_2}{2} = \frac{x_1 + a_1}{2}$, $\frac{0 + y_2}{2} = \frac{y_1 + a_2}{2}$. Ці рівності виконуються й тоді, коли точка O збігається з точкою B або точка A збігається з точкою M.

Звідси $a_1 = x_2 - x_1$, $a_2 = y_2 - y_1$. ◀

Із формули відстані між двома точками випливає, що коли вектор $\vec{a}$ має координати $(a_1; a_2)$, то

$$\boxed{\left|\vec{a}\right| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}}$$

Задача. Дано координати трьох вершин паралелограма $ABCD$: $A\ (3; -2)$, $B\ (-4; 1)$, $C\ (-2; -3)$. Знайдіть координати вершини D.

Розв'язання. Оскільки чотирикутник $ABCD$ — паралелограм, то $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$. Отже, координати цих векторів рівні.

Нехай координати точки D дорівнюють $(x; y)$. Для знаходження координат векторів $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{DC}$ скористаємося теоремою 13.1. Маємо:

$\overrightarrow{AB}\,(-4 - 3; 1 - (-2)) = \overrightarrow{AB}\,(-7; 3)$; $\overrightarrow{DC}\,(-2 - x; -3 - y)$. Звідси

$$\begin{cases} -7 = -2 - x, \\ 3 = -3 - y; \end{cases} \quad \begin{cases} x = 5, \\ y = -6. \end{cases}$$

Відповідь: $D\ (5; -6)$. ◀

1. Поясніть, що називають координатами даного вектора.
2. Що можна сказати про координати рівних векторів?
3. Що можна сказати про вектори, відповідні координати яких рівні?
4. Як знайти координати вектора, якщо відомо координати його початку та кінця?
5. Як знайти модуль вектора, якщо відомо його координати?

ПРАКТИЧНІ ЗАВДАННЯ

13.1.° За допомогою циркуля та лінійки побудуйте точку, координати якої дорівнюють координатам даного вектора $\vec{a}$ (рис. 13.3).

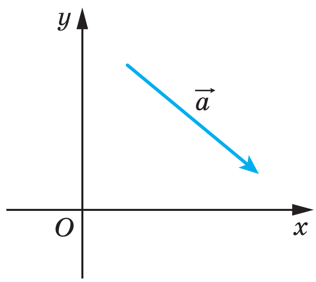


Рис. 13.3

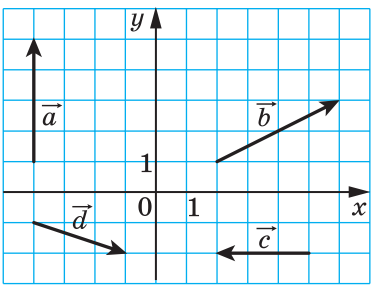


Рис. 13.4

13.2.° Відкладіть від початку координат вектори $\vec{a}\,(-3;\ 2)$, $\vec{b}\,(0;\ -2)$ і $\vec{c}\,(4;\ 0)$.

13.3.° Відкладіть від точки $M\ (-1;\ 2)$ вектори $\vec{a}\,(1;\ -3)$, $\vec{b}\,(-2;\ 0)$ і $\vec{c}\,(0;\ -1)$.

ВПРАВИ

13.4.° Знайдіть координати векторів, що зображені на рисунку 13.4.

13.5.° Знайдіть координати вектора $\overrightarrow{AB}$, якщо:

1) $A\ (2;\ 3)$, $B\ (-1;\ 4)$;
2) $A\ (3;\ 0)$, $B\ (0;\ -3)$;
3) $A\ (0;\ 0)$, $B\ (-2;\ -8)$;
4) $A\ (m;\ n)$, $B\ (p,\ k)$.

13.6.° Дано точку $A\ (1;\ 3)$ і вектор $\vec{a}\,(-2;\ 1)$. Знайдіть координати точки B такої, що $\overrightarrow{BA} = \vec{a}$.

13.7.° Дано точки $A\ (3;\ -7)$, $B\ (4;\ -5)$ і $C\ (5;\ 8)$. Знайдіть координати точки D такої, що $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.

13.8.° Від точки $A\ (4;\ -3)$ відкладено вектор $\vec{m}\,(-1;\ 8)$. Знайдіть координати кінця вектора.

13.9.° Дано точки A (3; −4), B (−2; 7), C (−4; 16) і D (1; 5). Доведіть, що $\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{DA}$.

13.10.° Доведіть, що чотирикутник $ABCD$ з вершинами в точках A (1; −5), B (2; 3), C (−3; 1) і D (−4; −7) є паралелограмом.

13.11.° Серед векторів $\vec{a}$ (3; −4), $\vec{b}$ (−4; 2), $\vec{c}\left(3; \sqrt{11}\right)$, $\vec{d}$ (−2; −4), $\vec{e}\left(-1; -2\sqrt{6}\right)$ і $\vec{f}$ (−4; 5) знайдіть такі, що мають рівні модулі.

13.12.° Дано точки A (1; −4), B (−2; 5), C (1 + a; −4 + b) і D (−2 + a; 5 + b). Доведіть, що $\left|\overrightarrow{AC}\right| = \left|\overrightarrow{BD}\right|$.

13.13.° Знайдіть усі значення x, при яких модуль вектора $\vec{a}$ (x; −8) дорівнює 10.

13.14.° При яких значеннях y модуль вектора $\vec{b}$ (12; y) дорівнює 13?

13.15.• Відрізок BM — медіана трикутника ABC із вершинами A (3; −5), B (2; −3) і C (−1; 7). Знайдіть координати та модуль вектора $\overrightarrow{BM}$.

13.16.• Точка F ділить сторону BC прямокутника $ABCD$ у відношенні 1 : 2, рахуючи від вершини B (рис. 13.5). Знайдіть координати векторів $\overrightarrow{AF}$ і $\overrightarrow{FD}$.

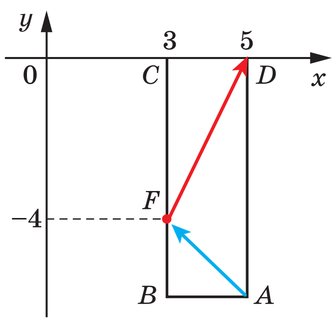


Рис. 13.5

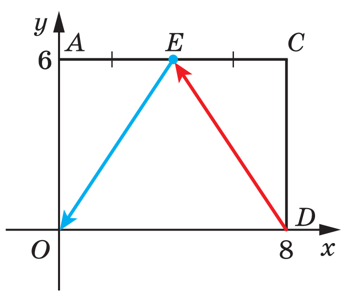


Рис. 13.6

13.17.• Точка E — середина сторони AC прямокутника $OACD$ (рис. 13.6). Знайдіть координати векторів $\overrightarrow{DE}$ і $\overrightarrow{EO}$.

13.18.• Модуль вектора $\vec{a}$ дорівнює 10. Його перша координата на 2 більша за другу. Знайдіть координати вектора $\vec{a}$.

13.19.• Модуль вектора $\vec{c}$ дорівнює 2, а його координати рівні. Знайдіть координати вектора $\vec{c}$.

13.20.•• Точки A (2; 5) і B (7; 5) — вершини прямокутника $ABCD$. Модуль вектора $\overrightarrow{BD}$ дорівнює 13. Знайдіть координати точок C і D.

13.21.•• Точки A (1; 2) і D (1; −6) — вершини прямокутника $ABCD$. Модуль вектора $\overrightarrow{AC}$ дорівнює 17. Знайдіть координати вершин B і C.

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

13.22. Два рівних рівнобедрених трикутники ADB і CBD ($AB = BD = CD$) мають спільну бічну сторону (рис. 13.7). Визначте вид чотирикутника $ABCD$.

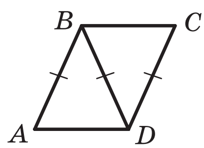


Рис. 13.7

13.23. Периметр трикутника дорівнює 48 см, а його бісектриса ділить сторону трикутника на відрізки завдовжки 5 см і 15 см. Знайдіть сторони трикутника.

13.24. Бічна сторона рівнобічної трапеції, описаної навколо кола, дорівнює a, а один із кутів — 60°. Знайдіть площу трапеції.

СПОСТЕРІГАЙТЕ, РИСУЙТЕ, КОНСТРУЮЙТЕ, ФАНТАЗУЙТЕ

13.25. Чи можна з квадрата зі стороною 10 см вирізати кілька кругів, сума діаметрів яких більша за 5 м?

14. Додавання і віднімання векторів

Якщо тіло перемістилося з точки A в точку B, а потім із точки B у точку C, то сумарне переміщення з точки A в точку C природно подати у вигляді вектора $\overrightarrow{AC}$, вважаючи цей вектор сумою векторів $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{BC}$, тобто $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ (рис. 14.1).

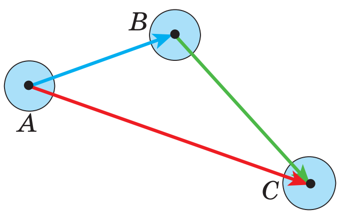


Рис. 14.1

Цей приклад підказує, як ввести поняття суми векторів, тобто як додати два даних вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$.

Відкладемо від довільної точки A вектор $\overrightarrow{AB}$, *рівний вектору* $\vec{a}$. *Далі від точки B відкладемо вектор* $\overrightarrow{BC}$, *рівний вектору* $\vec{b}$. *Вектор* $\overrightarrow{AC}$ *називають* **сумою векторів** $\vec{a}$ *і* $\vec{b}$ (рис. 14.2) *і записують:* $\vec{a}+\vec{b}=\overrightarrow{AC}$.

Описаний алгоритм додавання двох векторів називають **правилом трикутника**.

Ця назва пов'язана з тим, що коли вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ не є колінеарними, то точки A, B і C є вершинами трикутника (рис. 14.2).

За правилом трикутника можна додавати й колінеарні вектори. На рисунку 14.3 вектор $\overrightarrow{AC}$ дорівнює сумі колінеарних векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$.

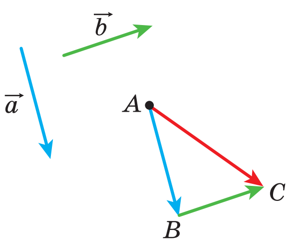


Рис. 14.2

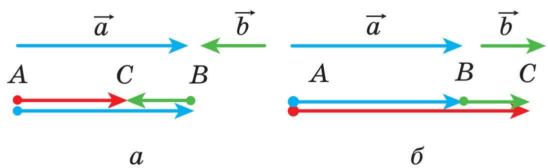


Рис. 14.3

Отже, ***для будь-яких трьох точок A, B і C виконується рівність*** $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$, яка виражає правило трикутника для додавання векторів.

Теорема 14.1. ***Якщо координати векторів*** $\vec{a}$ ***і*** $\vec{b}$ ***відповідно дорівнюють*** $(a_1; a_2)$ ***і*** $(b_1; b_2)$, ***то координати вектора*** $\vec{a}+\vec{b}$ ***дорівнюють*** $(a_1+b_1; a_2+b_2)$.

Доведення. Нехай точки $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$ і $C(x_3; y_3)$ такі, що $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$ і $\vec{b}=\overrightarrow{BC}$. Маємо: $\vec{a}+\vec{b}=\overrightarrow{AC}$. Доведемо, що координати вектора $\overrightarrow{AC}$ дорівнюють $(a_1+b_1; a_2+b_2)$.

Знайдемо координати векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\overrightarrow{AC}$: $\vec{a}(x_2-x_1; y_2-y_1)$, $\vec{b}(x_3-x_2; y_3-y_2)$, $\overrightarrow{AC}(x_3-x_1; y_3-y_1)$.

Маємо:

$\vec{a}+\vec{b}=\overrightarrow{AC}(x_3-x_1; y_3-y_1)=\overrightarrow{AC}(x_3-x_2+x_2-x_1; y_3-y_2+y_2-y_1)$.

З урахуванням того, що $x_2-x_1=a_1$, $x_3-x_2=b_1$, $y_2-y_1=a_2$, $y_3-y_2=b_2$, отримуємо: $\vec{a}+\vec{b}=\overrightarrow{AC}(a_1+b_1; a_2+b_2)$. ◀

Зауваження. Описуючи правило трикутника для знаходження суми векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$, ми відклали вектор $\vec{a}$ від довільної точки. Якщо точку A замінити точкою A_1, то замість вектора $\overrightarrow{AC}$, який дорівнює сумі векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$, отримаємо деякий вектор $\overrightarrow{A_1C_1}$. Із теореми 14.1 випливає, що координати векторів $\overrightarrow{AC}$ і $\overrightarrow{A_1C_1}$ дорівнюють $(a_1 + b_1; a_2 + b_2)$, отже, $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{A_1C_1}$. Це означає, що сума векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ не залежить від того, від якої точки відкладено вектор $\vec{a}$.

Властивості додавання векторів аналогічні властивостям додавання чисел.

Для будь-яких векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$ виконуються рівності:

1) $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$;

2) $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ — переставна властивість;

3) $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$ — сполучна властивість.

Для доведення цих властивостей досить порівняти відповідні координати векторів, записаних у правій та лівій частинах рівностей. Зробіть це самостійно.

Суму трьох і більше векторів знаходять так: спочатку додають перший і другий вектори, потім до отриманого вектора додають третій вектор і т. д. Наприклад, $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$.

З переставної та сполучної властивостей додавання векторів випливає, що при додаванні кількох векторів можна міняти місцями доданки та розставляти дужки у будь-який спосіб.

У фізиці часто доводиться додавати вектори, відкладені від однієї точки. Так, якщо до тіла прикладено сили $\vec{F_1}$ і $\vec{F_2}$ (рис. 14.4), то рівнодійна цих сил дорівнює сумі $\vec{F_1} + \vec{F_2}$.

Для знаходження суми двох неколінеарних векторів, відкладених від однієї точки, зручно користуватися **правилом паралелограма для додавання векторів**.

Нехай потрібно знайти суму неколінеарних векторів $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{AD}$ (рис. 14.5). Відкладемо вектор $\overrightarrow{BC}$, рівний вектору $\overrightarrow{AD}$. Тоді

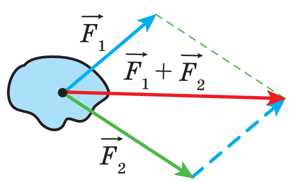


Рис. 14.4

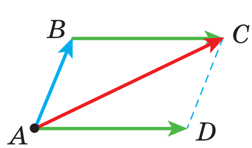


Рис. 14.5

$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$. Оскільки вектори $\overrightarrow{BC}$ і $\overrightarrow{AD}$ рівні, то чотирикутник $ABCD$ — паралелограм з діагоналлю AC.

Наведені міркування дозволяють сформулювати правило паралелограма для додавання неколінеарних векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$.

Відкладемо від довільної точки A вектор $\overrightarrow{AB}$, рівний вектору $\vec{a}$, і вектор $\overrightarrow{AD}$, рівний вектору $\vec{b}$. Побудуємо паралелограм $ABCD$ (рис. 14.6). *Тоді шукана сума $\vec{a}+\vec{b}$ дорівнює вектору $\overrightarrow{AC}$.*

Означення. Різницею векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називають такий вектор $\vec{c}$, сума якого з вектором $\vec{b}$ дорівнює вектору $\vec{a}$.

Пишуть: $\vec{c}=\vec{a}-\vec{b}$.

Покажемо, як побудувати вектор, рівний різниці заданих векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$.

Від довільної точки O відкладемо вектори $\overrightarrow{OA}$ і $\overrightarrow{OB}$, відповідно рівні векторам $\vec{a}$ і $\vec{b}$ (рис. 14.7). Тоді вектор $\overrightarrow{BA}$ дорівнює різниці $\vec{a}-\vec{b}$. Справді, $\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{OA}$. Отже, за означенням різниці двох векторів $\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{BA}$, тобто $\vec{a}-\vec{b}=\overrightarrow{BA}$.

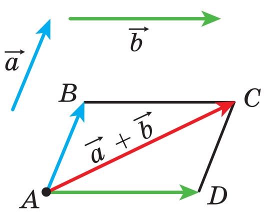


Рис. 14.6

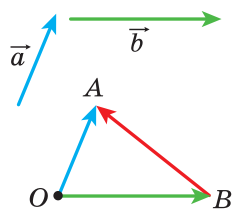


Рис. 14.7

На рисунку 14.7 вектори $\overrightarrow{OA}$ і $\overrightarrow{OB}$ неколінеарні. Проте описаний алгоритм можна застосовувати й для знаходження різниці колінеарних векторів. На рисунку 14.8 вектор $\overrightarrow{BA}$ дорівнює різниці колінеарних векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$.

а *б*

Рис. 14.8

Отже, ***для будь-яких трьох точок O, A і B виконується рівність*** $\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{BA}$, яка виражає **правило знаходження різниці двох векторів**, відкладених від однієї точки.

Теорема 14.2. ***Якщо координати векторів*** $\vec{a}$ ***і*** $\vec{b}$ ***відповідно дорівнюють*** $(a_1; a_2)$ **і** $(b_1; b_2)$, ***то координати вектора*** $\vec{a}-\vec{b}$ ***дорівнюють*** $(a_1 - b_1; a_2 - b_2)$.

Доведіть цю теорему самостійно.

Із теореми 14.2 випливає, що для будь-яких векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ існує єдиний вектор $\vec{c}$ такий, що $\vec{a}-\vec{b}=\vec{c}$.

Означення. Два ненульових вектори називають протилежними, якщо їхні модулі рівні й вектори протилежно напрямлені.

Якщо вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ протилежні, то говорять, що вектор $\vec{a}$ **протилежний** вектору $\vec{b}$, а вектор $\vec{b}$ протилежний вектору $\vec{a}$.

Вектором, протилежним нульовому вектору, вважають нульовий вектор.

Вектор, протилежний вектору $\vec{a}$, позначають так: $-\vec{a}$.

З означення випливає, що протилежним вектору $\overrightarrow{AB}$ є вектор $\overrightarrow{BA}$. Тоді ***для будь-яких точок A і B виконується рівність*** $\overrightarrow{AB}=-\overrightarrow{BA}$.

Із правила трикутника випливає, що

$$\vec{a}+\left(-\vec{a}\right)=\vec{0}.$$

А із цієї рівності випливає, що коли вектор $\vec{a}$ має координати $(a_1; a_2)$, то вектор $-\vec{a}$ має координати $(-a_1; -a_2)$.

Теорема 14.3. ***Для будь-яких векторів*** $\vec{a}$ ***і*** $\vec{b}$ ***виконується рівність*** $\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+\left(-\vec{b}\right)$.

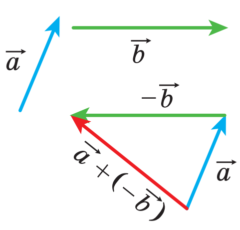


Рис. 14.9

Для доведення достатньо порівняти відповідні координати векторів, записаних у правій та лівій частинах рівності. Зробіть це самостійно.

Теорема 14.3 дає змогу звести віднімання векторів до додавання: *щоб від вектора* $\vec{a}$ *відняти вектор* $\vec{b}$, *можна до вектора* $\vec{a}$ *додати вектор* $-\vec{b}$ (рис. 14.9).

Задача. Діагоналі паралелограма $ABCD$ перетинаються в точці O (рис. 14.10). Виразіть вектори $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ і $\overrightarrow{CB}$ через вектори $\overrightarrow{CO}=\vec{a}$ і $\overrightarrow{BO}=\vec{b}$.

Розв'язання. Оскільки точка O — середина відрізків AC і BD, то $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{CO}=\vec{a}$ і $\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{BO}=\vec{b}$.

Маємо:

$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OB}=-\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{BO}=-\vec{a}-\vec{b}$;

$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OA}=\vec{b}-\vec{a}$;

$\overrightarrow{CB}=-\overrightarrow{AD}=\vec{a}-\vec{b}$. ◄

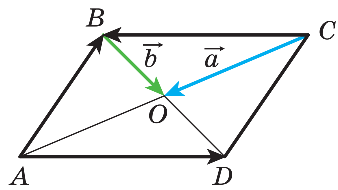


Рис. 14.10

?

1. Опишіть правило трикутника для знаходження суми векторів.
2. Яка рівність виражає правило трикутника для знаходження суми векторів?
3. Чому дорівнюють координати вектора, рівного сумі двох даних векторів?
4. Запишіть рівності, які виражають властивості додавання векторів.
5. Опишіть правило паралелограма для знаходження суми двох векторів.
6. Який вектор називають різницею двох векторів?
7. Яка рівність виражає правило знаходження різниці двох векторів, відкладених від однієї точки?
8. Чому дорівнюють координати вектора, рівного різниці двох даних векторів?
9. Які вектори називають протилежними?
10. Як позначають вектор, протилежний вектору $\vec{a}$?
11. Як можна звести віднімання векторів до додавання векторів?

ПРАКТИЧНІ ЗАВДАННЯ

14.1.° За допомогою правила трикутника побудуйте суму векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$, зображених на рисунку 14.11.

14.2.° За допомогою правила паралелограма побудуйте суму векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$, зображених на рисунку 14.11, *а–г*.

14.3.° Для векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$, зображених на рисунку 14.11, побудуйте вектор $\vec{a}-\vec{b}$.

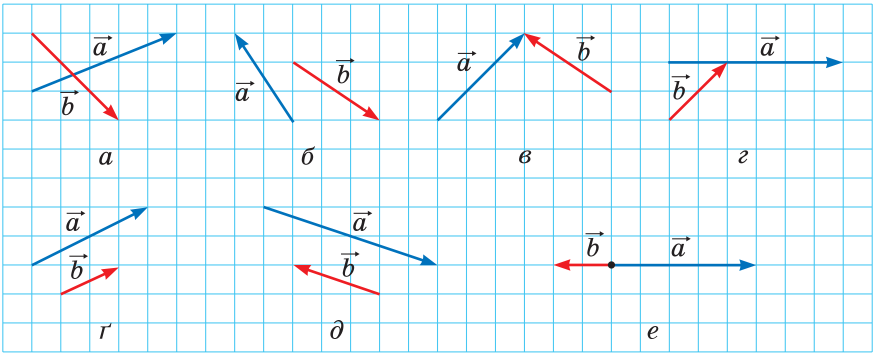


Рис. 14.11

14.4.° Накресліть трикутник ABC. Відкладіть від точки A вектор, протилежний вектору:

1) $\overrightarrow{AB}$; 2) $\overrightarrow{CA}$; 3) $\overrightarrow{BC}$.

14.5.° Накресліть паралелограм $ABCD$. Побудуйте вектори $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{DB}$.

14.6.° Накресліть трикутник MNP. Побудуйте вектори $\overrightarrow{MP}+\overrightarrow{PN}$, $\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{PN}$, $\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{MP}$.

14.7.° Накресліть паралелограм $ABCD$. Побудуйте вектори $\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{DB}$.

14.8.° Накресліть трикутник ABC. Побудуйте вектори $\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{CA}-\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{CA}$.

14.9.° Позначте чотири точки M, N, P і Q. Побудуйте вектор $\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{NP}+\overrightarrow{PQ}$.

14.10.° Для векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$, зображених на рисунку 14.12, побудуйте вектор:

1) $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$; 2) $\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}$; 3) $-\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$.

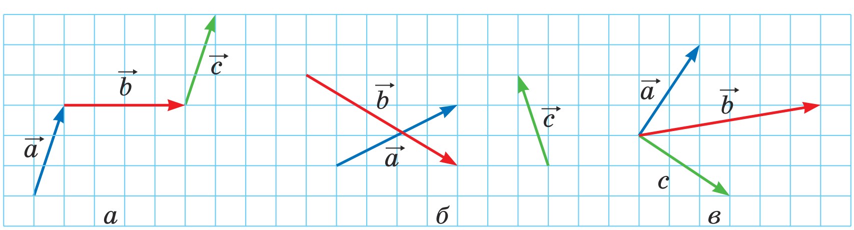


Рис. 14.12

14.11.• Відкладіть від однієї точки три вектори, модулі яких рівні, так, щоб сума двох із них дорівнювала третьому вектору.

14.12.• Відкладіть від однієї точки три вектори, модулі яких рівні, так, щоб їхня сума дорівнювала нуль-вектору.

14.13.• Для точок A, B, C і D, зображених на рисунку 14.13, побудуйте такий вектор $\vec{x}$, щоб $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CD} + \vec{x} = \vec{0}$.

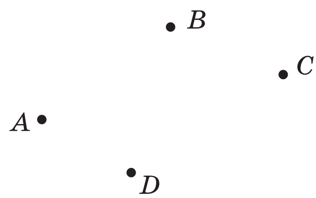


Рис. 14.13

14.14.• Накресліть трикутник ABC. Побудуйте таку точку X, щоб:

1) $\overrightarrow{AX} = \overrightarrow{BX} + \overrightarrow{XC}$;

2) $\overrightarrow{BX} = \overrightarrow{XC} - \overrightarrow{XA}$.

ВПРАВИ

14.15.° Дано трикутник ABC. Виразіть вектор $\overrightarrow{BC}$ через вектори:
1) $\overrightarrow{CA}$ і $\overrightarrow{AB}$; 2) $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{AC}$.

14.16.° Дано паралелограм $ABCD$. Виразіть вектори $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ і $\overrightarrow{DA}$ через вектори $\overrightarrow{CA} = \vec{a}$ і $\overrightarrow{CD} = \vec{c}$.

14.17.° Дано паралелограм $ABCD$. Виразіть вектори $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BD}$ і $\overrightarrow{BC}$ через вектори $\overrightarrow{BA} = \vec{a}$ і $\overrightarrow{DA} = \vec{b}$.

14.18.° Дано паралелограм $ABCD$. Виразіть вектори $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{DC}$ і $\overrightarrow{DA}$ через вектори $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ і $\overrightarrow{BD} = \vec{b}$.

14.19.° Доведіть, що для будь-яких точок A, B, C і D виконується рівність:

1) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC}$;

2) $\overrightarrow{CA} - \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{DA} - \overrightarrow{DB}$;

3) $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{DB}$.

14.20.° Доведіть, що для будь-яких точок A, B, C і D виконується рівність:

1) $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DC}$;

2) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CD}$;

3) $\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{DC}$.

14.21.° Точки M і N — середини відповідно сторін BA і BC трикутника ABC. Виразіть вектори $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{NC}$, $\overrightarrow{MN}$ і $\overrightarrow{NB}$ через вектори $\overrightarrow{BM} = \vec{m}$ і $\overrightarrow{BN} = \vec{n}$.

14.22.° У паралелограмі $ABCD$ діагоналі перетинаються в точці O. Доведіть, що $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=\vec{0}$.

14.23.° Дано чотирикутник $ABCD$ і деяку точку O. Відомо, що $\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{DO}+\overrightarrow{OC}$. Доведіть, що чотирикутник $ABCD$ — паралелограм.

14.24.° Дано чотирикутник $ABCD$ і деяку точку O. Відомо, що $\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC}$. Доведіть, що чотирикутник $ABCD$ — паралелограм.

14.25.° Дано вектори $\vec{a}\,(4; -5)$ і $\vec{b}\,(-1; 7)$. Знайдіть:

1) координати векторів $\vec{a}+\vec{b}$ і $\vec{a}-\vec{b}$;

2) $|\vec{a}+\vec{b}|$ і $|\vec{a}-\vec{b}|$.

14.26.° Дано точки $A\,(1; -3)$, $B\,(4; 5)$, $C\,(-2; -1)$ і $D\,(3; 0)$. Знайдіть:

1) координати векторів $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}$ і $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CD}$;

2) $|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}|$ і $|\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CD}|$.

14.27.° Сума векторів $\vec{a}\,(5; -3)$ і $\vec{b}\,(x; 4)$ дорівнює вектору $\vec{c}\,(2; y)$. Знайдіть x і y.

14.28.° Сума векторів $\vec{a}\,(x; -1)$ і $\vec{b}\,(2; y)$ дорівнює вектору $\vec{c}\,(-3; 4)$. Знайдіть x і y.

14.29.° Дано вектор $\overrightarrow{MN}\,(3; -5)$. Знайдіть координати вектора $\overrightarrow{NM}$.

14.30.° Сторона рівностороннього трикутника ABC дорівнює 3 см. Знайдіть $|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}|$.

14.31.° Катет рівнобедреного прямокутного трикутника ABC ($\angle C = 90°$) дорівнює 4 см. Знайдіть $|\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}|$.

14.32.° Дано точки $N\,(3; -5)$ і $F\,(4; 1)$. Знайдіть $|\overrightarrow{ON}-\overrightarrow{OF}|$ і $|\overrightarrow{FO}+\overrightarrow{ON}|$, де O — довільна точка.

14.33.° Плавчиха зі швидкістю $\sqrt{3}$ м/с відносно води перепливає річку в напрямі, перпендикулярному до паралельних берегів. Швидкість течії дорівнює 1 м/с. Під яким кутом до напряму, перпендикулярному до берегів, переміщається плавчиха?

14.34.• Доведіть, що для будь-яких n точок $A_1, A_2, \ldots, A_n$ виконується рівність

$$\overrightarrow{A_1A_2}+\overrightarrow{A_2A_3}+\overrightarrow{A_3A_4}+\ldots+\overrightarrow{A_{n-1}A_n}=\overrightarrow{A_1A_n}.$$

14.35.• Доведіть, що для будь-яких точок A, B, C, D і E виконується рівність

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DE}+\overrightarrow{EA}=\vec{0}.$$

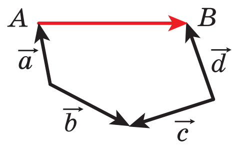


Рис. 14.14

14.36.• Виразіть вектор $\overrightarrow{AB}$ через вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ і $\vec{d}$ (рис. 14.14).

14.37.• У паралелограмі $ABCD$ точки M, N і K — середини відповідно сторін AB, BC і CD. Виразіть вектори $\overrightarrow{BA}$ і $\overrightarrow{AD}$ через вектори $\overrightarrow{MN} = \vec{m}$ і $\overrightarrow{KN} = \vec{n}$.

14.38.• У паралелограмі $ABCD$ діагоналі перетинаються в точці O. Виразіть вектори $\overrightarrow{BA}$ і $\overrightarrow{AD}$ через вектори $\overrightarrow{DO} = \vec{a}$ і $\overrightarrow{OC} = \vec{b}$.

14.39.• Чотирикутник $ABCD$ — паралелограм. Доведіть, що:
1) $\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DB} - \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB}$;
2) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CA} - \overrightarrow{DA} = \vec{0}$.

14.40.• У трикутнику ABC проведено медіану BM. Доведіть, що:
1) $\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{MA} = \vec{0}$; 2) $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BA} = \vec{0}$.

14.41.• Доведіть, що для неколінеарних векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ виконується нерівність $|\vec{a} + \vec{b}| < |\vec{a}| + |\vec{b}|$.

14.42.• Доведіть, що для неколінеарних векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ виконується нерівність $|\vec{a} - \vec{b}| < |\vec{a}| + |\vec{b}|$.

14.43.•• Для ненульових векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ виконується рівність $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a}| + |\vec{b}|$. Доведіть, що $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$.

14.44.•• Для ненульових векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ виконується рівність $|\vec{a} - \vec{b}| = |\vec{a}| + |\vec{b}|$. Доведіть, що $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$.

14.45.•• Чи може бути нульовим вектором сума трьох векторів, модулі яких дорівнюють:
1) 5; 2; 3; 2) 4; 6; 3; 3) 8; 9; 18?

14.46.•• Діагоналі чотирикутника $ABCD$ перетинаються в точці O. Відомо, що $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}$. Доведіть, що чотирикутник $ABCD$ — паралелограм.

14.47.•• Вектори $\overrightarrow{MN}$, $\overrightarrow{PQ}$ і $\overrightarrow{EF}$ попарно неколінеарні, причому $\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{EF} = \vec{0}$. Доведіть, що існує трикутник, сторони якого дорівнюють відрізкам MN, PQ і EF.

14.48.•• Доведіть, що для паралелограма $ABCD$ і довільної точки X виконується рівність $\overrightarrow{XA} + \overrightarrow{XC} = \overrightarrow{XB} + \overrightarrow{XD}$.

14.49.•• Дано дві точки A і B. Знайдіть геометричне місце точок X таких, що $\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BX}\right|=\left|\overrightarrow{AB}\right|$.

14.50.•• Дано дві точки A і B. Знайдіть геометричне місце точок X таких, що $\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BX}\right|=\left|\overrightarrow{BX}\right|$.

14.51.•• Весляр із точки A переправляється через річку завширшки 240 м зі сталою власною швидкістю, спрямовуючи ніс човна перпендикулярно до протилежного берега. Через 4 хв човен причалює до протилежного берега в точці C, розташованій нижче за течією від точки A на 48 м. Знайдіть швидкість течії та швидкість човна відносно берегів річки.

14.52.•• Катер із точки A переправляється через річку завширшки 300 м зі сталою власною швидкістю. Через 100 с катер причалює до протилежного берега в точці B. Пряма AB перпендикулярна до паралельних берегів річки. Швидкість течії річки $\sqrt{3}$ м/с. Під яким кутом до берега річки було спрямовано ніс катера?

14.53.* Медіани трикутника ABC перетинаються в точці M. Доведіть, що $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=\vec{0}$.

14.54.* На сторонах трикутника ABC у зовнішній бік побудовано паралелограми AA_1B_1B, BB_2C_1C, CC_2A_2A. Прямі A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 попарно непаралельні. Доведіть, що існує трикутник, сторони якого дорівнюють відрізкам A_1A_2, B_1B_2 і C_1C_2.

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

14.55. У трикутник ABC вписано паралелограм $CDMK$ так, що кут C у них спільний, а точки D, M і K належать відповідно сторонам AC, AB і BC трикутника. Знайдіть сторони паралелограма $CDMK$, якщо його периметр дорівнює 20 см, $AC = 12$ см, $BC = 9$ см.

14.56. Три кола, радіуси яких дорівнюють 1 см, 2 см і 3 см, попарно дотикаються одне до одного зовнішнім чином. Знайдіть радіус кола, яке проходить через центри даних кіл.

14.57. Доведіть, що площа правильного шестикутника, вписаного в коло, становить $\frac{3}{4}$ площі правильного шестикутника, описаного навколо цього кола.

15. Множення вектора на число

Нехай дано ненульовий вектор $\vec{a}$. На рисунку 15.1 зображено вектор $\overrightarrow{AB}$, рівний вектору $\vec{a}+\vec{a}$, і вектор $\overrightarrow{CD}$, рівний вектору $(-\vec{a})+(-\vec{a})+(-\vec{a})$. Очевидно, що

$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = 2\left|\vec{a}\right| \text{ і } \overrightarrow{AB} \uparrow\uparrow \vec{a},$$
$$\left|\overrightarrow{CD}\right| = 3\left|\vec{a}\right| \text{ і } \overrightarrow{CD} \uparrow\downarrow \vec{a}.$$

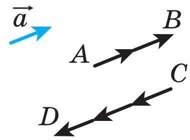


Рис. 15.1

Вектор $\overrightarrow{AB}$ позначають $2\vec{a}$ і вважають, що його отримано в результаті **множення вектора $\vec{a}$ на число** 2. Аналогічно вважають, що вектор $\overrightarrow{CD}$ отримано в результаті множення вектора $\vec{a}$ на число -3, і записують: $\overrightarrow{CD} = -3\vec{a}$.

Цей приклад підказує, як ввести поняття «множення вектора на число».

Означення. Добутком ненульового вектора $\vec{a}$ і числа k, відмінного від нуля, називають такий вектор $\vec{b}$, що:

1) $\left|\vec{b}\right| = |k|\left|\vec{a}\right|$;

2) якщо $k > 0$, то $\vec{b} \uparrow\uparrow \vec{a}$; якщо $k < 0$, то $\vec{b} \uparrow\downarrow \vec{a}$.

Пишуть: $\vec{b} = k\vec{a}$.

Якщо $\vec{a} = \vec{0}$ або $k = 0$, то вважають, що $k\vec{a} = \vec{0}$.

На рисунку 15.2 зображено вектори $\vec{a}$, $-2\vec{a}$, $\frac{2}{3}\vec{a}$, $\sqrt{3}\,\vec{a}$.

З означення випливає, що

$$1 \cdot \vec{a} = \vec{a},$$
$$-1 \cdot \vec{a} = -\vec{a}.$$

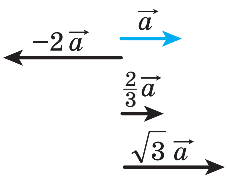


Рис. 15.2

Також з означення випливає, що *коли $\vec{b} = k\vec{a}$, то вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ колінеарні.*

А якщо вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ колінеарні, то чи можна подати вектор $\vec{b}$ у вигляді добутку $k\vec{a}$? Відповідь дає така теорема.

Теорема 15.1. ***Якщо вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ колінеарні й $\vec{a} \neq \vec{0}$, то існує таке число k, що $\vec{b} = k\vec{a}$.***

Доведення. Якщо $\vec{b} = \vec{0}$, то при $k = 0$ отримуємо, що $\vec{b} = k\vec{a}$.

Якщо $\vec{b} \neq \vec{0}$, то або $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$, або $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$.

1) Нехай $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$. Розглянемо вектор $\vec{c} = k\vec{a}$, де $k = \frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|}$. Оскільки $k > 0$, то $\vec{c} \uparrow\uparrow \vec{a}$, отже, $\vec{c} \uparrow\uparrow \vec{b}$. Крім того, $|\vec{c}| = k|\vec{a}| = |\vec{b}|$. Таким чином, вектори $\vec{b}$ і $\vec{c}$ співнапрямлені та їхні модулі рівні. Звідси $\vec{b} = \vec{c} = k\vec{a}$.

2) Нехай $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$. Розглянемо вектор $\vec{c} = k\vec{a}$, де $k = -\frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|}$. Для цього випадку завершіть доведення самостійно. ◀

Теорема 15.2. ***Якщо вектор $\vec{a}$ має координати $(a_1; a_2)$, то вектор $k\vec{a}$ має координати $(ka_1; ka_2)$.***

Доведення. ⊛ Якщо $\vec{a} = \vec{0}$ або $k = 0$, то твердження теореми очевидне.

Нехай $\vec{a} \neq \vec{0}$ і $k \neq 0$. Розглянемо вектор $\vec{b}\,(ka_1; ka_2)$. Покажемо, що $\vec{b} = k\vec{a}$.

Маємо: $|\vec{b}| = \sqrt{(ka_1)^2 + (ka_2)^2} = |k|\sqrt{a_1^2 + a_2^2} = |k||\vec{a}|$.

Відкладемо від початку координат вектори $\overrightarrow{OA}$ і $\overrightarrow{OB}$, рівні відповідно векторам $\vec{a}$ і $\vec{b}$. Оскільки пряма OA проходить через початок координат, то її рівняння має вигляд $ax + by = 0$.

Цій прямій належить точка $A\,(a_1; a_2)$. Тоді

$$aa_1 + ba_2 = 0. \text{ Звідси } a\,(ka_1) + b\,(ka_2) = 0.$$

Отже, точка $B\,(ka_1; ka_2)$ теж належить прямій OA, тому вектори $\overrightarrow{OA}$ і $\overrightarrow{OB}$ колінеарні, тобто $\vec{a} \parallel \vec{b}$.

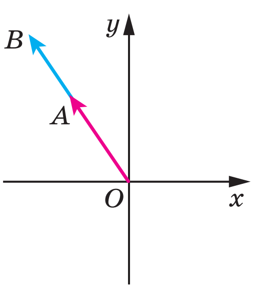


Рис. 15.3

При $k > 0$ числа a_1 і ka_1 мають однакові знаки (або обидва дорівнюють нулю). Таку саму властивість мають числа a_2 і ka_2. Отже, при $k > 0$ точки A і B лежать в одній координатній чверті (або на одному координатному промені), тому вектори $\overrightarrow{OA}$ і $\overrightarrow{OB}$ співнапрямлені (рис. 15.3), тобто $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$. При $k < 0$ вектори $\overrightarrow{OA}$ і $\overrightarrow{OB}$ є протилежно напрямленими, тобто $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$.

Отже, ми отримали, що $\vec{b} = k\vec{a}$. ◀

Наслідок 1. ***Вектори $\vec{a}\,(a_1;\,a_2)$ і $\vec{b}\,(ka_1;\,ka_2)$ колінеарні.***

Наслідок 2. ***Якщо вектори $\vec{a}\,(a_1;\,a_2)$ і $\vec{b}\,(b_1;\,b_2)$ колінеарні, причому $\vec{a} \neq \vec{0}$, то існує таке число k, що $b_1 = ka_1$ і $b_2 = ka_2$.***

За допомогою теореми 15.2 можна довести такі властивості множення вектора на число.

Для будь-яких чисел k, m і будь-яких векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$ виконуються рівності:

1) $(km)\vec{a} = k(m\vec{a})$ — сполучна властивість;

2) $(k+m)\vec{a} = k\vec{a} + m\vec{a}$ — перша розподільна властивість;

3) $k(\vec{a}+\vec{b}) = k\vec{a} + k\vec{b}$ — друга розподільна властивість.

Для доведення цих властивостей досить порівняти відповідні координати векторів, записаних у правих і лівих частинах рівностей. Зробіть це самостійно.

Ці властивості дають змогу перетворювати вирази, які містять суму векторів, різницю векторів і добуток вектора на число, аналогічно тому, як ми перетворюємо алгебраїчні вирази. Наприклад, $2(\vec{a} - 3\vec{b}) + 3(\vec{a} + \vec{b}) = 2\vec{a} - 6\vec{b} + 3\vec{a} + 3\vec{b} = 5\vec{a} - 3\vec{b}$.

Задача 1. Доведіть, що коли $\overrightarrow{OA} = k\overrightarrow{OB}$, то точки O, A і B лежать на одній прямій.

Розв'язання. З умови випливає, що вектори $\overrightarrow{OA}$ і $\overrightarrow{OB}$ колінеарні. До того ж ці вектори відкладено від однієї точки O. Отже, точки O, A і B лежать на одній прямій. ◄

Задача 2. Точка M — середина відрізка AB і X — довільна точка (рис. 15.4). Доведіть, що $\overrightarrow{XM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{XA} + \overrightarrow{XB})$.

Розв'язання. Застосовуючи правило трикутника, запишемо:

$$\overrightarrow{XM} = \overrightarrow{XA} + \overrightarrow{AM};$$
$$\overrightarrow{XM} = \overrightarrow{XB} + \overrightarrow{BM}.$$

Додамо ці дві рівності:

$$2\overrightarrow{XM} = \overrightarrow{XA} + \overrightarrow{XB} + \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BM}.$$

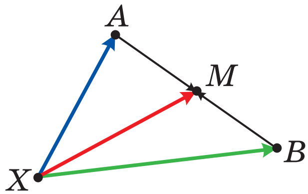


Рис. 15.4

Оскільки вектори $\overrightarrow{AM}$ і $\overrightarrow{BM}$ протилежні, то $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BM} = \vec{0}$. Маємо: $2\overrightarrow{XM} = \overrightarrow{XA} + \overrightarrow{XB}$. Звідси $\overrightarrow{XM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{XA} + \overrightarrow{XB})$. ◄

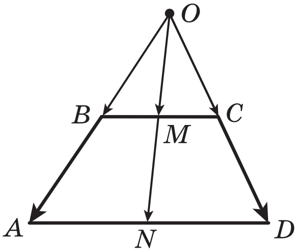


Рис. 15.5

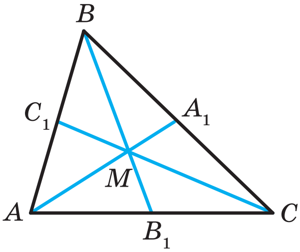


Рис. 15.6

Задача 3. Доведіть, що середини основ трапеції та точка перетину продовжень її бічних сторін лежать на одній прямій.

Розв'язання. Нехай точки M і N — середини основ BC і AD трапеції $ABCD$, O — точка перетину прямих AB і CD (рис. 15.5).

Застосовуючи ключову задачу 2, запишемо: $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})$, $\overrightarrow{ON} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OD})$.

Оскільки $\overrightarrow{OB} \parallel \overrightarrow{OA}$ і $\overrightarrow{OC} \parallel \overrightarrow{OD}$, то $\overrightarrow{OB} = k\overrightarrow{OA}$ і $\overrightarrow{OC} = k_1\overrightarrow{OD}$, де k і k_1 — деякі числа.

Оскільки $\Delta BOC \sim \Delta AOD$, то $\frac{OB}{OA} = \frac{OC}{OD}$. Отже, $k = k_1$.

Маємо: $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}) = \frac{1}{2}(k\overrightarrow{OA} + k\overrightarrow{OD}) = k \cdot \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OD}) = k\overrightarrow{ON}$.

Із ключової задачі 1 випливає, що точки O, M і N лежать на одній прямій. ◄

Задача 4. Доведіть, що коли M — точка перетину медіан трикутника ABC, то $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \vec{0}$.

Розв'язання[1]. Нехай відрізки AA_1, BB_1 і CC_1 — медіани трикутника ABC (рис. 15.6). Маємо:

$$\overrightarrow{AA_1} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC});$$

$$\overrightarrow{BB_1} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC});$$

$$\overrightarrow{CC_1} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CA}).$$

[1] У вказівці до задачі 14.53 наведено інший спосіб розв'язання задачі 4.

Звідси $\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{BB_1}+\overrightarrow{CC_1}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CA}\right)=\vec{0}.$

Із властивості медіан трикутника випливає, що $AM=\frac{2}{3}AA_1$. Тоді $\overrightarrow{MA}=-\frac{2}{3}\overrightarrow{AA_1}$. Аналогічно $\overrightarrow{MB}=-\frac{2}{3}\overrightarrow{BB_1}$, $\overrightarrow{MC}=-\frac{2}{3}\overrightarrow{CC_1}$. Звідси $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=-\frac{2}{3}\overrightarrow{AA_1}-\frac{2}{3}\overrightarrow{BB_1}-\frac{2}{3}\overrightarrow{CC_1}=-\frac{2}{3}\left(\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{BB_1}+\overrightarrow{CC_1}\right)=\vec{0}.$ ◄

1. Що називають добутком ненульового вектора $\vec{a}$ і числа k, відмінного від нуля?
2. Чому дорівнює добуток $k\vec{a}$, якщо $k=0$ або $\vec{a}=\vec{0}$?
3. Що можна сказати про ненульові вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$, якщо $\vec{b}=k\vec{a}$, де k – деяке число?
4. Відомо, що вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ колінеарні, причому $\vec{a}\neq\vec{0}$. Як можна виразити вектор $\vec{b}$ через вектор $\vec{a}$?
5. Вектор $\vec{a}$ має координати $(a_1;\ a_2)$. Чому дорівнюють координати вектора $k\vec{a}$?
6. Що можна сказати про вектори, координати яких дорівнюють $(a_1;\ a_2)$ і $(ka_1;\ ka_2)$?
7. Як пов'язані між собою відповідні координати колінеарних векторів $\vec{a}\,(a_1;\ a_2)$ і $\vec{b}\,(b_1;\ b_2)$?
8. Запишіть сполучну та розподільні властивості множення вектора на число.

ПРАКТИЧНІ ЗАВДАННЯ

15.1.° Дано вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$ (рис. 15.7). Побудуйте вектор:

1) $2\vec{b}$; 2) $-\frac{1}{3}\vec{c}$; 3) $\frac{2}{3}\vec{a}$; 4) $-\frac{1}{6}\vec{a}$.

15.2.° Дано вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$ (рис. 15.7). Побудуйте вектор:

1) $\frac{1}{2}\vec{a}$; 2) $-2\vec{b}$; 3) $-\frac{2}{3}\vec{c}$.

15.3.° Дано вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ (рис. 15.8). Побудуйте вектор:

1) $2\vec{a}+\vec{b}$; 2) $\frac{1}{3}\vec{a}+\vec{b}$; 3) $\vec{a}-\frac{1}{2}\vec{b}$; 4) $-\frac{1}{3}\vec{a}-\frac{2}{3}\vec{b}$.

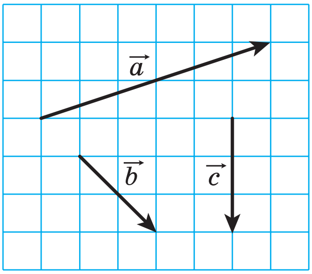


Рис. 15.7

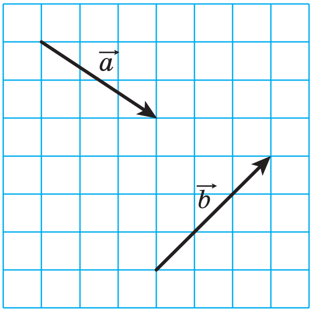


Рис. 15.8

15.4.° Побудуйте два неколінеарних вектори $\vec{x}$ і $\vec{y}$. Позначте довільну точку O. Від точки O відкладіть вектор:

1) $3\vec{x}+\vec{y}$; 2) $\vec{x}+2\vec{y}$; 3) $-\frac{1}{2}\vec{x}+3\vec{y}$; 4) $-2\vec{x}-\frac{1}{3}\vec{y}$.

15.5.• Побудуйте три точки A, B і C такі, що:

1) $\overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{AC}$; 2) $\overrightarrow{AB}=-3\overrightarrow{AC}$; 3) $\overrightarrow{BC}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$; 4) $\overrightarrow{AC}=-\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$.

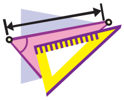
15.6.• Накресліть трикутник ABC. Позначте точку M — середину сторони AC.

1) Від точки M відкладіть вектор, рівний вектору $\frac{1}{2}\overrightarrow{CB}$.

2) Від точки B відкладіть вектор, рівний вектору $\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$.

15.7.• Накресліть трапецію $ABCD$ ($BC \parallel AD$). Позначте точку M — середину сторони AB. Від точки M відкладіть вектор, рівний вектору $\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$.

15.8.• Накресліть трикутник ABC. Побудуйте вектор, рівний вектору $\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$, так, щоб його початок належав стороні AB, а кінець — стороні BC.



ВПРАВИ

15.9.° Знайдіть модулі векторів $3\vec{m}$ та $-\frac{1}{2}\vec{m}$, якщо $|\vec{m}|=4$.

15.10.° Який із векторів, $3\vec{a}$ чи $-\frac{1}{3}\vec{a}$, співнапрямлений із вектором $\vec{a}$, якщо $\vec{a} \neq \vec{0}$?

15.11.° Визначте, співнапрямленими чи протилежно напрямленими є ненульові вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$, якщо:

1) $\vec{b} = 2\vec{a}$; 2) $\vec{a} = -\frac{1}{3}\vec{b}$; 3) $\vec{b} = \sqrt{2}\,\vec{a}$.

Знайдіть відношення $\frac{|\vec{a}|}{|\vec{b}|}$.

15.12.° Виразіть вектор $\vec{p}$ з рівності:

1) $\vec{q} = 3\vec{p}$; 2) $\overrightarrow{AC} = -2\vec{p}$; 3) $\frac{1}{2}\vec{p} = \vec{q}$; 4) $2\vec{p} = 3\vec{q}$.

15.13.° У паралелограмі $ABCD$ діагоналі перетинаються в точці O. Виразіть:

1) вектор $\overrightarrow{AO}$ через вектор $\overrightarrow{AC}$;
2) вектор $\overrightarrow{BD}$ через вектор $\overrightarrow{BO}$;
3) вектор $\overrightarrow{CO}$ через вектор $\overrightarrow{AC}$.

15.14.° У паралелограмі $ABCD$ діагоналі перетинаються в точці O, $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$. Виразіть вектор $\overrightarrow{AO}$ через вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$.

15.15.° У паралелограмі $ABCD$ на діагоналі AC позначено точку M так, що $AM : MC = 1 : 3$. Виразіть вектор $\overrightarrow{MC}$ через вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$, де $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{b} = \overrightarrow{AD}$.

15.16.° У паралелограмі $ABCD$ точка M — середина сторони BC, $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$. Виразіть вектори $\overrightarrow{AM}$ і $\overrightarrow{MD}$ через вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$.

15.17.° У трикутнику ABC точки M і N — середини сторін AB і BC відповідно. Виразіть:

1) вектор $\overrightarrow{MN}$ через вектор $\overrightarrow{CA}$;
2) вектор $\overrightarrow{AC}$ через вектор $\overrightarrow{MN}$.

15.18.° На відрізку AB завдовжки 18 см позначено точку C так, що $BC = 6$ см. Виразіть:

1) вектор $\overrightarrow{AB}$ через вектор $\overrightarrow{AC}$;
2) вектор $\overrightarrow{BC}$ через вектор $\overrightarrow{AB}$;
3) вектор $\overrightarrow{AC}$ через вектор $\overrightarrow{BC}$.

15.19.° Дано вектор $\vec{a}$ (–4; 2). Знайдіть координати та модулі векторів $3\vec{a}$, $-\frac{1}{2}\vec{a}$ і $\frac{3}{2}\vec{a}$.

15.20.° Дано вектор $\vec{b}$ (–6; 12). Знайдіть координати та модулі векторів $2\vec{b}$, $-\frac{1}{6}\vec{b}$ і $\frac{2}{3}\vec{b}$.

15.21.° Дано вектор $\vec{a}$ (3; –2). Які з векторів $\vec{b}$ (–3; –2), $\vec{c}$ (–6; 4), $\vec{d}\left(\frac{3}{2}; -1\right)$, $\vec{e}\left(-1; -\frac{2}{3}\right)$ і $\vec{f}\left(-3\sqrt{2}; 2\sqrt{2}\right)$ колінеарні вектору $\vec{a}$?

15.22.° Дано вектори $\vec{a}$ (3; –3) і $\vec{b}$ (–16; 8). Знайдіть координати вектора:

1) $2\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}$; 2) $-\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{3}{4}\vec{b}$; 3) $\vec{a}-\frac{5}{8}\vec{b}$.

15.23.° Дано вектори $\vec{m}$ (–2; 4) і $\vec{n}$ (3; –1). Знайдіть координати вектора:

1) $3\vec{m}+2\vec{n}$; 2) $-\frac{1}{2}\vec{m}+2\vec{n}$; 3) $\vec{m}-3\vec{n}$.

15.24.• На сторонах AB і AC трикутника ABC позначено відповідно точки M і N так, що $AM : MB = AN : NC = 1 : 2$. Виразіть вектор $\overrightarrow{MN}$ через вектор $\overrightarrow{CB}$.

15.25.• Точки O, A і B лежать на одній прямій. Доведіть, що існує таке число k, що $\overrightarrow{OA}=k\overrightarrow{OB}$.

15.26.• На сторонах AB і BC паралелограма $ABCD$ позначено відповідно точки M і N так, що $AM : MB = 1 : 2$, $BN : NC = 2 : 1$. Виразіть вектор $\overrightarrow{NM}$ через вектори $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$ і $\overrightarrow{AD}=\vec{b}$.

15.27.• На сторонах BC і CD паралелограма $ABCD$ позначено відповідно точки E і F так, що $BE : EC = 3 : 1$, $CF : FD = 1 : 3$. Виразіть вектор $\overrightarrow{EF}$ через вектори $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$ і $\overrightarrow{AD}=\vec{b}$.

15.28.• Доведіть, що вектори $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{CD}$ колінеарні, якщо A (1; 1), B (3; –2), C (–1; 3), D (5; –6).

15.29.• Серед векторів $\vec{a}$ (1; –2), $\vec{b}$ (–3; –6), $\vec{c}$ (–4; 8) і $\vec{d}$ (–1; –2) укажіть пари колінеарних векторів.

15.30.• Дано вектори $\vec{m}$ (4; –6), $\vec{n}\left(-1; \frac{3}{2}\right)$ і $\vec{k}\left(3; -\frac{9}{2}\right)$. Укажіть пари співнапрямлених і протилежно напрямлених векторів.

15.31.• Знайдіть значення x, при яких вектори $\vec{a}\,(1;\,x)$ і $\vec{b}\left(\frac{x}{4};\,4\right)$ колінеарні.

15.32.• При яких значеннях y вектори $\vec{a}\,(2;\,3)$ і $\vec{b}\,(-1;\,y)$ колінеарні?

15.33.• Дано вектор $\vec{b}\,(-3;\,1)$. Знайдіть координати вектора, колінеарного вектору $\vec{b}$, модуль якого вдвічі більший за модуль вектора $\vec{b}$. Скільки розв'язків має задача?

15.34.• Знайдіть координати вектора $\vec{m}$, протилежно напрямленого вектору $\vec{n}\,(5;\,-12)$, якщо $|\vec{m}| = 39$.

15.35.• Знайдіть координати вектора $\vec{a}$, співнапрямленого з вектором $\vec{b}\,(-9;\,12)$, якщо $|\vec{a}| = 5$.

15.36.• Доведіть, що чотирикутник $ABCD$ з вершинами $A\,(-1;\,2)$, $B\,(3;\,5)$, $C\,(14;\,6)$ і $D\,(2;\,-3)$ є трапецією.

15.37.• Доведіть, що точки $A\,(-1;\,3)$, $B\,(4;\,-7)$ і $D\,(-2;\,5)$ лежать на одній прямій.

15.38.• Дано вектори $\vec{a}\,(1;\,-4)$, $\vec{b}\,(0;\,3)$ і $\vec{c}\,(2;\,-17)$. Знайдіть такі числа x і y, що $\vec{c} = x\vec{a} + y\vec{b}$.

15.39.•• У паралелограмі $ABCD$ діагоналі перетинаються в точці O. На стороні BC позначено точку K так, що $BK : KC = 2 : 3$. Виразіть вектор $\overrightarrow{OK}$ через вектори $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ і $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$.

15.40.•• Діагоналі чотирикутника $ABCD$ перетинаються в точці O так, що $AO : OC = 1 : 2$, $BO : OD = 4 : 3$. Виразіть вектори $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$ і $\overrightarrow{DA}$ через вектори $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ і $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$.

15.41.•• На сторонах AB і BC трикутника ABC позначено відповідно точки K і F так, що $AK : KB = 1 : 2$ і $BF : FC = 2 : 3$. Виразіть вектори $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AF}$, $\overrightarrow{KC}$ і $\overrightarrow{KF}$ через вектори $\overrightarrow{BK} = \vec{m}$ і $\overrightarrow{CF} = \vec{n}$.

15.42.•• На сторонах AC і BC трикутника ABC позначено відповідно точки M і N так, що $AM : MC = 1 : 3$ і $BN : NC = 4 : 3$. Виразіть вектори $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{AN}$, $\overrightarrow{BM}$ і $\overrightarrow{NM}$ через вектори $\overrightarrow{BN} = \vec{k}$ і $\overrightarrow{AM} = \vec{p}$.

15.43.•• Медіани трикутника ABC перетинаються в точці M. Виразіть вектор $\overrightarrow{BM}$ через вектори $\overrightarrow{BA}$ і $\overrightarrow{BC}$.

15.44.•• За допомогою векторів доведіть теорему про середню лінію трикутника.

15.45.•• Точки M_1 і M_2 — середини відрізків A_1B_1 і A_2B_2 відповідно. Доведіть, що $\overrightarrow{M_1M_2} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{A_1A_2} + \overrightarrow{B_1B_2}\right)$.

15.46.•• Використовуючи задачу 15.45, доведіть теорему про середню лінію трапеції.

15.47.•• Точки M і N — відповідно середини діагоналей AC і BD чотирикутника $ABCD$. Використовуючи задачу 15.45, доведіть, що $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{DC}\right)$.

15.48.•• Точки M і N — відповідно середини діагоналей AC і BD трапеції $ABCD$ ($BC \parallel AD$). Використовуючи задачу 15.45, доведіть, що $MN \parallel AD$.

15.49.•• На стороні AC трикутника ABC позначено точку M так, що $AM : MC = 2 : 3$. Доведіть, що $\overrightarrow{BM} = \frac{3}{5}\overrightarrow{BA} + \frac{2}{5}\overrightarrow{BC}$.

15.50.•• На стороні BC трикутника ABC позначено точку D так, що $BD : DC = 1 : 2$. Доведіть, що $\overrightarrow{AD} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$.

15.51.* Доведіть, що існує трикутник, сторони якого дорівнюють медіанам даного трикутника.

15.52.* Точки M_1 і M_2 — середини відрізків A_1B_1 і A_2B_2 відповідно. Доведіть, що середини відрізків A_1A_2, M_1M_2 і B_1B_2 лежать на одній прямій.

15.53.* На стороні AD і на діагоналі AC паралелограма $ABCD$ позначено відповідно точки M і N так, що $AM = \frac{1}{5}AD$ і $AN = \frac{1}{6}AC$. Доведіть, що точки M, N і B лежать на одній прямій.

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

15.54. Менша основа та бічна сторона рівнобічної трапеції дорівнюють 12 см. Чому дорівнює середня лінія трапеції, якщо один з її кутів дорівнює 60°?

15.55. Діагоналі паралелограма дорівнюють 6 см і 16 см, а одна зі сторін — 7 см. Знайдіть кут між діагоналями паралелограма та його площу.

15.56. Знайдіть хорду кола радіуса R, кінці якої розбивають це коло на дві дуги, довжини яких відносяться як 2 : 1.

СПОСТЕРІГАЙТЕ, РИСУЙТЕ, КОНСТРУЮЙТЕ, ФАНТАЗУЙТЕ

15.57. Дано квадрат розміром 101×101 клітинку. Клітинки квадрата розфарбували в шаховому порядку в чорний і білий кольори так, що центральна клітинка виявилася чорною. Для кожної пари різнокольорових клітинок відкладають вектор, початок якого збігається із центром чорної клітинки, а кінець — із центром білої. Доведіть, що сума всіх відкладених векторів дорівнює нуль-вектору.

ЗАСТОСУВАННЯ ВЕКТОРІВ

При застосуванні векторів до розв'язування задач часто використовують таку лему.

Лема. ***Нехай M — така точка відрізка AB, що $\frac{AM}{MB} = \frac{m}{n}$*** (рис. 15.9). ***Тоді для будь-якої точки X виконується рівність***

$$\overrightarrow{XM} = \frac{n}{m+n}\overrightarrow{XA} + \frac{m}{m+n}\overrightarrow{XB}.$$

Доведення. Маємо: $\overrightarrow{XM} - \overrightarrow{XA} = \overrightarrow{AM}$.

Оскільки $AM = \frac{m}{m+n}AB$, то $\overrightarrow{AM} = \frac{m}{m+n}\overrightarrow{AB}$.

Запишемо: $\overrightarrow{XM} - \overrightarrow{XA} = \frac{m}{m+n}\overrightarrow{AB}$.

Оскільки $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{XB} - \overrightarrow{XA}$, то маємо:

$$\overrightarrow{XM} - \overrightarrow{XA} = \frac{m}{m+n}\left(\overrightarrow{XB} - \overrightarrow{XA}\right);$$

$$\overrightarrow{XM} = \overrightarrow{XA} - \frac{m}{m+n}\overrightarrow{XA} + \frac{m}{m+n}\overrightarrow{XB};$$

$$\overrightarrow{XM} = \frac{n}{m+n}\overrightarrow{XA} + \frac{m}{m+n}\overrightarrow{XB}. \blacktriangleleft$$

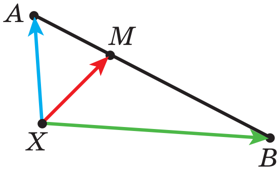


Рис. 15.9

Зауважимо, що ця лема є узагальненням ключової задачі 2 п. 15.

Задача. Нехай M — точка перетину медіан трикутника ABC і X — довільна точка (рис. 15.10). Доведіть, що

$$\overrightarrow{XM} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{XA} + \overrightarrow{XB} + \overrightarrow{XC}\right).$$

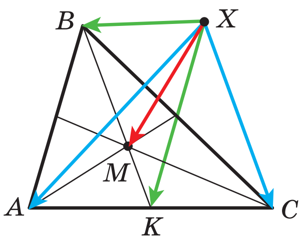


Рис. 15.10

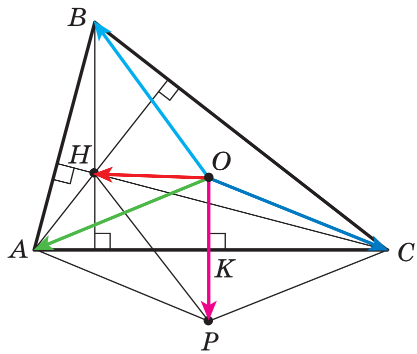


Рис. 15.11

Розв'язання. Нехай точка K — середина відрізка AC. Маємо: $BM : MK = 2 : 1$. Тоді, використовуючи лему, можна записати: $\overrightarrow{XM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{XB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{XK} = \frac{1}{3}\overrightarrow{XB} + \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{XA} + \overrightarrow{XC}\right) = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{XA} + \overrightarrow{XB} + \overrightarrow{XC}\right)$. ◄

Доведемо векторну рівність, яка пов'язує дві чудові[1] точки трикутника.

Теорема. ***Якщо точка H — ортоцентр трикутника ABC, а точка O — центр його описаного кола, то***

$$\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}. \qquad (*)$$

Доведення. Для прямокутного трикутника рівність (*) є очевидною.

Нехай трикутник ABC не є прямокутним. Опустимо з точки O перпендикуляр OK на сторону AC трикутника ABC (рис. 15.11). У курсі геометрії 8 класу було доведено, що $BH = 2OK$.

На промені OK позначимо точку P таку, що $OK = KP$. Тоді $BH = OP$. Оскільки $BH \parallel OP$, то чотирикутник $HBOP$ — паралелограм.

За правилом паралелограма $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OP}$.

Оскільки точка K є серединою відрізка AC, то в чотирикутнику $AOCP$ діагоналі точкою перетину діляться навпіл. Отже, цей чотирикутник — паралелограм. Звідси $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}$.

Маємо: $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}$. ◄

Звернемося до векторної рівності $\overrightarrow{XM} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{XA} + \overrightarrow{XB} + \overrightarrow{XC}\right)$, де M — точка перетину медіан трикутника ABC. Оскільки X —

---

[1] Матеріал про чудові точки трикутника див. у підручнику «Геометрія. 8 клас».

довільна точка, то рівність залишається правильною, якщо за точку X вибрати точку O — центр описаного кола трикутника ABC.

Маємо: $3\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$.

Беручи до уваги рівність (*), отримуємо: $3\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OH}$.

Ця рівність означає, що точки O, M і H лежать на одній прямій, яку називають **прямою Ейлера**. Нагадаємо, що цю чудову властивість було доведено в підручнику 8 класу, але в інший спосіб.

16. Скалярний добуток векторів

Нехай $\vec{a}$ і $\vec{b}$ — два ненульових та неспівнапрямлених вектори (рис. 16.1). Від довільної точки O відкладемо вектори $\overrightarrow{OA}$ і $\overrightarrow{OB}$, відповідно рівні векторам $\vec{a}$ і $\vec{b}$. Величину кута AOB називатимемо **кутом між векторами** $\vec{a}$ і $\vec{b}$.

Кут між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$ позначають так: $\angle(\vec{a}, \vec{b})$. Наприклад, на рисунку 16.1 $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = 120°$, а на рисунку 16.2 $\angle(\vec{m}, \vec{n}) = 180°$.

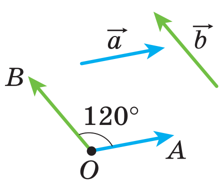


Рис. 16.1

Рис. 16.2

Якщо вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ співнапрямлені, то вважають, що $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = 0°$. Якщо хоча б один із векторів $\vec{a}$ або $\vec{b}$ нульовий, то також вважають, що $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = 0°$.

Отже, для будь-яких векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ має місце нерівність:

$$0° \leqslant \angle(\vec{a}, \vec{b}) \leqslant 180°.$$

Вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називають **перпендикулярними**, якщо кут між ними дорівнює 90°. Пишуть: $\vec{a} \perp \vec{b}$.

Ви вмієте додавати й віднімати вектори, множити вектор на число. Також із курсу фізики ви знаєте, що коли під впливом постійної сили $\vec{F}$ тіло перемістилося з точки A в точку B (рис. 16.3), то виконана механічна робота дорівнює $|\vec{F}||\overrightarrow{AB}|\cos\varphi$, де $\varphi = \angle(\vec{F}, \overrightarrow{AB})$.

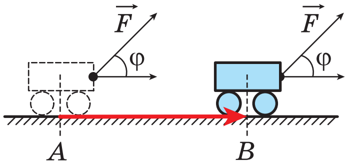


Рис. 16.3

Викладене вище підказує, що доцільно ввести ще одну дію над векторами.

Означення. Скалярним добутком двох векторів називають добуток їхніх модулів і косинуса кута між ними.

Скалярний добуток векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ позначають так: $\vec{a} \cdot \vec{b}$. Маємо:

$$\boxed{\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\angle(\vec{a}, \vec{b})}$$

Якщо хоча б один із векторів $\vec{a}$ або $\vec{b}$ нульовий, то очевидно, що $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$.

Нехай $\vec{a} = \vec{b}$. Тоді $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}||\vec{a}|\cos 0° = |\vec{a}|^2$.

Скалярний добуток $\vec{a} \cdot \vec{a}$ називають **скалярним квадратом** вектора $\vec{a}$ і позначають $\vec{a}^2$.

Ми отримали, що $\vec{a}^2 = |\vec{a}|^2$, тобто ***скалярний квадрат вектора дорівнює квадрату його модуля.***

Теорема 16.1. ***Скалярний добуток двох ненульових векторів дорівнює нулю тоді й тільки тоді, коли ці вектори перпендикулярні.***

Доведення. ⊙ Нехай $\vec{a} \perp \vec{b}$. Доведемо, що $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$.

Маємо: $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = 90°$. Звідси $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos 90° = 0$.

Нехай тепер $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$. Доведемо, що $\vec{a} \perp \vec{b}$.

Запишемо: $|\vec{a}||\vec{b}|\cos\angle(\vec{a}, \vec{b}) = 0$. Оскільки $|\vec{a}| \neq 0$ і $|\vec{b}| \neq 0$, то $\cos\angle(\vec{a}, \vec{b}) = 0$. Звідси $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = 90°$, тобто $\vec{a} \perp \vec{b}$. ◄

Теорема 16.2. ***Скалярний добуток векторів $\vec{a}\,(a_1; a_2)$ і $\vec{b}\,(b_1; b_2)$ можна обчислити за формулою***

$$\boxed{\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2}$$

Доведення. Спочатку розглянемо випадок, коли вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ неколінеарні.

Відкладемо від початку координат вектори $\overrightarrow{OA}$ і $\overrightarrow{OB}$, відповідно рівні векторам $\vec{a}$ і $\vec{b}$ (рис. 16.4). Тоді $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = \angle AOB$.

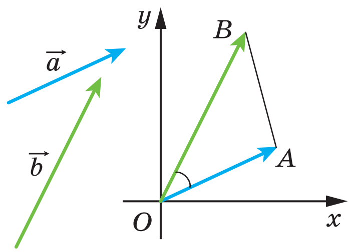


Рис. 16.4

Застосуємо теорему косинусів до трикутника AOB:

$$AB^2 = OA^2 + OB^2 - 2OA \cdot OB \cdot \cos \angle AOB.$$

Звідси

$$OA \cdot OB \cdot \cos \angle AOB = \frac{1}{2}(OA^2 + OB^2 - AB^2).$$

Оскільки $|\vec{a}| = OA$ і $|\vec{b}| = OB$, то $OA \cdot OB \cdot \cos \angle AOB = \vec{a} \cdot \vec{b}$.

Крім того, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \vec{b} - \vec{a}$. Звідси $\overrightarrow{AB}\,(b_1 - a_1; b_2 - a_2)$.

Маємо: $\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{2}\left(|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - |\overrightarrow{AB}|^2\right)$. Скориставшися формулою знаходження модуля вектора за його координатами, запишемо:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{2}\left((a_1^2 + a_2^2) + (b_1^2 + b_2^2) - (b_1 - a_1)^2 - (b_2 - a_2)^2\right).$$

Спрощуючи вираз, який записано в правій частині останньої рівності, отримуємо:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2.$$

Розглянемо випадок, коли вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ колінеарні.

Якщо $\vec{a} = \vec{0}$ або $\vec{b} = \vec{0}$, то очевидно, що $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2$.

Якщо $\vec{a} \neq \vec{0}$ і $\vec{b} \neq \vec{0}$, то існує таке число k, що $\vec{b} = k\vec{a}$, тобто $b_1 = ka_1$, $b_2 = ka_2$.

Якщо $k > 0$, то $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = 0°$. Маємо:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot (k\vec{a}) = |\vec{a}|\,|k\vec{a}|\cos 0° = |k|\,|\vec{a}|^2 = k(a_1^2 + a_2^2) =$$
$$= a_1 \cdot ka_1 + a_2 \cdot ka_2 = a_1 b_1 + a_2 b_2.$$

Випадок, коли $k < 0$, розгляньте самостійно. ◄

Наслідок. ***Косинус кута між ненульовими векторами*** $\vec{a}\,(a_1;\,a_2)$ ***і*** $\vec{b}\,(b_1;\,b_2)$ ***можна обчислити за формулою***

$$\boxed{\cos\angle\left(\vec{a},\,\vec{b}\right)=\frac{a_1b_1+a_2b_2}{\sqrt{a_1^2+a_2^2}\cdot\sqrt{b_1^2+b_2^2}}}\qquad (*)$$

Доведення. З означення скалярного добутку векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ випливає, що $\cos\angle\left(\vec{a},\,\vec{b}\right)=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|}$. Скориставшися теоремою 16.2 і формулою знаходження модуля вектора за його координатами, отримуємо формулу (*). ◀

За допомогою теореми 16.2 легко довести такі властивості скалярного добутку векторів.

Для будь-яких векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ ***і будь-якого числа*** k ***виконуються рівності:***

1) $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$ — переставна властивість;

2) $\left(k\vec{a}\right)\cdot\vec{b}=k\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)$ — сполучна властивість;

3) $\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}$ — розподільна властивість.

Для доведення цих властивостей достатньо виразити через координати векторів скалярні добутки, записані в правих і лівих частинах рівностей, та порівняти їх. Зробіть це самостійно.

Ці властивості разом із властивостями додавання векторів і множення вектора на число дають змогу перетворювати вирази, які містять скалярний добуток векторів, аналогічно тому, як ми перетворюємо алгебраїчні вирази.

Наприклад, $\left(\vec{a}+\vec{b}\right)^2=\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\cdot\left(\vec{a}+\vec{b}\right)=\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\cdot\vec{a}+\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\cdot\vec{b}=$
$=\vec{a}^{\,2}+\vec{b}\cdot\vec{a}+\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}^{\,2}=\vec{a}^{\,2}+2\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}^{\,2}.$

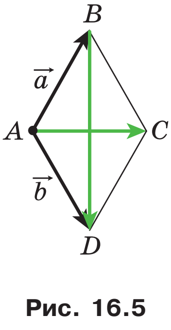


Рис. 16.5

Задача 1. За допомогою векторів доведіть, що діагоналі ромба перпендикулярні.

Розв'язання. На рисунку 16.5 зображено ромб $ABCD$. Нехай $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AD}=\vec{b}$. Очевидно, що $\left|\vec{a}\right|=\left|\vec{b}\right|$. За правилом паралелограма маємо: $\overrightarrow{AC}=\vec{a}+\vec{b}$ і $\overrightarrow{BD}=-\vec{a}+\vec{b}$. Звідси

$$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}=\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\cdot\left(-\vec{a}+\vec{b}\right)=\vec{b}^{\,2}-\vec{a}^{\,2}=\left|\vec{b}\right|^2-\left|\vec{a}\right|^2=0.$$

Отже, $AC\perp BD$. ◀

Задача 2. Відомо, що $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 1$, $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = 120°$. Знайдіть $|2\vec{a} - 3\vec{b}|$.

Розв'язання. Оскільки скалярний квадрат вектора дорівнює квадрату його модуля, то $|2\vec{a} - 3\vec{b}|^2 = (2\vec{a} - 3\vec{b})^2$. Звідси

$$|2\vec{a} - 3\vec{b}| = \sqrt{(2\vec{a} - 3\vec{b})^2} = \sqrt{4\vec{a}^2 - 12\vec{a} \cdot \vec{b} + 9\vec{b}^2} =$$

$$= \sqrt{4|\vec{a}|^2 - 12|\vec{a}||\vec{b}|\cos\angle(\vec{a}, \vec{b}) + 9|\vec{b}|^2} = \sqrt{36 + 18 + 9} = \sqrt{63} = 3\sqrt{7}.$$

Відповідь: $3\sqrt{7}$. ◀

Задача 3. У трикутнику ABC відомо, що $AB = 4$ см, $BC = 6\sqrt{3}$ см, $\angle ABC = 30°$. Знайдіть медіану BM.

Розв'язання. Застосовуючи ключову задачу 2 п. 15, запишемо: $\overrightarrow{BM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC})$ (рис. 16.6). Звідси

$$\overrightarrow{BM}^2 = \frac{1}{4}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC})^2 =$$

$$= \frac{1}{4}(\overrightarrow{BA}^2 + 2\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BC}^2) =$$

$$= \frac{1}{4}(|\overrightarrow{BA}|^2 + 2|\overrightarrow{BA}||\overrightarrow{BC}| \cdot \cos\angle ABC + |\overrightarrow{BC}|^2) =$$

$$= \frac{1}{4}\left(16 + 48\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + 108\right) = 49.$$

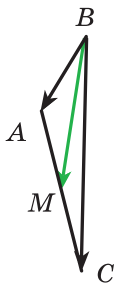


Рис. 16.6

Отже, $BM^2 = 49$; $BM = 7$ см.

Відповідь: 7 см. ◀

?

1. Опишіть, як можна побудувати кут, величина якого дорівнює куту між двома ненульовими та неспівнапрямленими векторами.
2. Чому дорівнює кут між двома співнапрямленими векторами?
3. Чому дорівнює кут між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$, якщо хоча б один із них нульовий?
4. Як позначають кут між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$?
5. У яких межах знаходиться кут між будь-якими векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$?
6. Які вектори називають перпендикулярними?
7. Що називають скалярним добутком двох векторів?
8. Що називають скалярним квадратом вектора?

9. Чому дорівнює скалярний квадрат вектора?
10. Сформулюйте умову перпендикулярності двох ненульових векторів.
11. Що випливає з рівності $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$, якщо $\vec{a} \neq \vec{0}$ і $\vec{b} \neq \vec{0}$?
12. Як знайти скалярний добуток векторів, якщо відомо їхні координати?
13. Як знайти косинус кута між двома ненульовими векторами, якщо відомо їхні координати?
14. Запишіть властивості скалярного добутку векторів.

ПРАКТИЧНІ ЗАВДАННЯ

16.1.° Побудуйте кут, величина якого дорівнює куту між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$ (рис. 16.7).

16.2.° Побудуйте кут, величина якого дорівнює куту між векторами $\vec{m}$ і $\vec{n}$ (рис. 16.8).

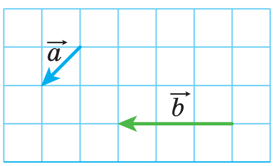


Рис. 16.7

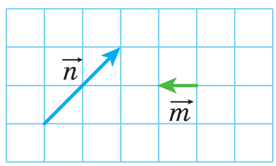


Рис. 16.8

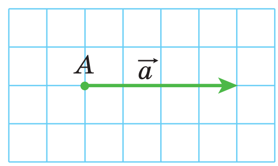


Рис. 16.9

16.3.° На рисунку 16.9 зображено вектор $\vec{a}$ (довжина сторони клітинки дорівнює 0,5 см). Відкладіть від точки A вектор $\vec{b}$ такий, що $|\vec{b}| = 3$ см і $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = 120°$. Скільки розв'язків має задача?

ВПРАВИ

16.4.° На рисунку 16.10 зображено рівносторонній трикутник ABC, медіани AM і BK якого перетинаються в точці F. Знайдіть кут між векторами:

1) $\overrightarrow{BA}$ і $\overrightarrow{BC}$;
2) $\overrightarrow{BA}$ і $\overrightarrow{AC}$;
3) $\overrightarrow{BC}$ і $\overrightarrow{AM}$;
4) $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{AM}$;
5) $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{BK}$;
6) $\overrightarrow{AM}$ і $\overrightarrow{BK}$;
7) $\overrightarrow{CF}$ і $\overrightarrow{AB}$.

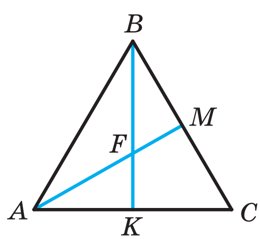


Рис. 16.10

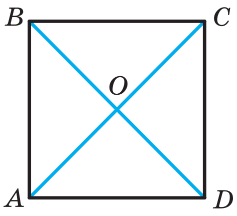


Рис. 16.11

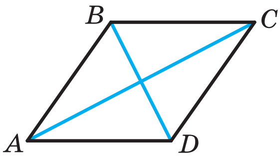


Рис. 16.12

16.5.° На рисунку 16.11 зображено квадрат $ABCD$, діагоналі якого перетинаються в точці O. Знайдіть кут між векторами:

1) $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{DA}$;
2) $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{AC}$;
3) $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{CA}$;
4) $\overrightarrow{DB}$ і $\overrightarrow{CB}$;
5) $\overrightarrow{BO}$ і $\overrightarrow{CD}$.

16.6.° Знайдіть скалярний добуток векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$, якщо:

1) $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 5$, $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = 60°$;
2) $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 2\sqrt{2}$, $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = 135°$;
3) $|\vec{a}| = 4$, $|\vec{b}| = 1$, $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = 0°$;
4) $|\vec{a}| = \frac{1}{2}$, $|\vec{b}| = 6$, $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = 180°$;
5) $|\vec{a}| = 0{,}3$, $|\vec{b}| = 0$, $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = 137°$.

16.7.° Знайдіть скалярний добуток векторів $\vec{m}$ і $\vec{n}$, якщо:

1) $|\vec{m}| = 7\sqrt{2}$, $|\vec{n}| = 4$, $\angle(\vec{m}, \vec{n}) = 45°$;
2) $|\vec{m}| = 8$, $|\vec{n}| = \sqrt{3}$, $\angle(\vec{m}, \vec{n}) = 150°$.

16.8.° Знайдіть скалярний добуток векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$, якщо:

1) $\vec{a}(2; -1)$, $\vec{b}(1; -3)$;
2) $\vec{a}(-5; 1)$, $\vec{b}(2; 7)$;
3) $\vec{a}(1; -4)$, $\vec{b}(8; 2)$.

16.9.° Знайдіть скалярний добуток векторів $\vec{m}$ і $\vec{n}$, якщо:

1) $\vec{m}(3; -2)$, $\vec{n}(1; 0)$;
2) $\vec{m}\left(\frac{3}{2}; -1\right)$, $\vec{n}(6; 9)$.

16.10.° На рисунку 16.12 зображено ромб $ABCD$, у якому $AB = 6$, $\angle ABC = 120°$. Знайдіть скалярний добуток векторів:

1) $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{AD}$;
2) $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{CB}$;
3) $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{DC}$;
4) $\overrightarrow{BC}$ і $\overrightarrow{DA}$;
5) $\overrightarrow{BD}$ і $\overrightarrow{AC}$;
6) $\overrightarrow{DB}$ і $\overrightarrow{DC}$;
7) $\overrightarrow{BD}$ і $\overrightarrow{AD}$.

16.11.° У трикутнику ABC відомо, що $\angle C = 90°$, $\angle A = 30°$, $CB = 2$. Знайдіть скалярний добуток векторів:

1) $\overrightarrow{AC}$ і $\overrightarrow{BC}$; 2) $\overrightarrow{AC}$ і $\overrightarrow{AB}$; 3) $\overrightarrow{CB}$ і $\overrightarrow{BA}$.

16.12.° Знайдіть роботу сили величиною 6 Н з переміщення тіла на відстань 7 м, якщо кут між напрямами сили та переміщення дорівнює 60°.

16.13.° Знайдіть косинус кута між векторами $\vec{a}\,(1; -2)$ і $\vec{b}\,(2; -3)$.

16.14.° Який знак має скалярний добуток векторів, якщо кут між ними:

1) гострий; 2) тупий?

16.15.° Відомо, що скалярний добуток векторів є:

1) додатним числом; 2) від'ємним числом.

Визначте вид кута між векторами.

16.16.• У рівносторонньому трикутнику ABC, сторона якого дорівнює 1, медіани AA_1 і BB_1 перетинаються в точці M. Обчисліть:

1) $\overrightarrow{AA_1} \cdot \overrightarrow{BB_1}$; 2) $\overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{MA_1}$.

16.17.• Точка O — центр правильного шестикутника $ABCDEF$, сторона якого дорівнює 1. Обчисліть:

1) $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{CD}$; 2) $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{CD}$; 3) $\overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{ED}$; 4) $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CD}$.

16.18.• При якому значенні x вектори $\vec{a}\,(3; x)$ і $\vec{b}\,(1; 9)$ перпендикулярні?

16.19.• Відомо, що $x \neq 0$ і $y \neq 0$. Доведіть, що вектори $\vec{a}\,(-x; y)$ і $\vec{b}\,(y; x)$ перпендикулярні.

16.20.• При яких значеннях x вектори $\vec{a}\,(2x; -3)$ і $\vec{b}\,(x; 6)$ перпендикулярні?

16.21.• При якому значенні y скалярний добуток векторів $\vec{a}\,(4; y)$ і $\vec{b}\,(3; -2)$ дорівнює 14?

16.22.• При яких значеннях x кут між векторами $\vec{a}\,(2; 5)$ і $\vec{b}\,(x; 4)$:

1) гострий; 2) тупий?

16.23.• Знайдіть координати вектора $\vec{b}$, колінеарного вектору $\vec{a}\,(3; -4)$, якщо $\vec{a} \cdot \vec{b} = -100$.

16.24.• Відомо, що вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ неколінеарні та $|\vec{a}| = |\vec{b}| \neq 0$. При яких значеннях x вектори $\vec{a} + x\vec{b}$ та $\vec{a} - x\vec{b}$ перпендикулярні?

16.25.° Вектори $\vec{a}+\vec{b}$ і $\vec{a}-\vec{b}$ перпендикулярні. Доведіть, що $|\vec{a}|=|\vec{b}|$.

16.26.° Відомо, що $|\vec{a}|=3$, $|\vec{b}|=2\sqrt{2}$, $\angle(\vec{a}, \vec{b})=45°$. Знайдіть скалярний добуток $(2\vec{a}-\vec{b})\cdot\vec{b}$.

16.27.° Знайдіть скалярний добуток $(\vec{a}-2\vec{b})\cdot(\vec{a}+\vec{b})$, якщо

$$|\vec{a}|=|\vec{b}|=1,\ \angle(\vec{a}, \vec{b})=120°.$$

16.28.° Відомо, що $|\vec{a}|=\sqrt{3}$, $|\vec{b}|=1$, $\angle(\vec{a}, \vec{b})=150°$. Знайдіть $|2\vec{a}+5\vec{b}|$.

16.29.° Відомо, що $|\vec{m}|=1$, $|\vec{n}|=2$, $\angle(\vec{m}, \vec{n})=60°$. Знайдіть $|2\vec{m}-3\vec{n}|$.

16.30.° Доведіть, що чотирикутник $ABCD$ з вершинами A (3; −2), B (4; 0), C (2; 1) і D (1; −1) є прямокутником.

16.31.° Доведіть, що чотирикутник $ABCD$ з вершинами A (−1; 4), B (−2; 5), C (−1; 6) і D (0; 5) є квадратом.

16.32.° Знайдіть косинуси кутів трикутника з вершинами A (1; 6), B (−2; 3) і C (2; −1).

16.33.° Знайдіть кути трикутника з вершинами A (0; 6), $B\left(4\sqrt{3}; 6\right)$ і $C\left(3\sqrt{3}; 3\right)$.

16.34.° Доведіть, що для будь-яких двох векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ виконується нерівність $-|\vec{a}||\vec{b}|\leqslant\vec{a}\cdot\vec{b}\leqslant|\vec{a}||\vec{b}|$.

16.35.° Визначте взаємне розміщення двох ненульових векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$, якщо:

1) $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|$;
2) $\vec{a}\cdot\vec{b}=-|\vec{a}||\vec{b}|$.

16.36.•• Знайдіть кут між векторами $\vec{m}$ і $\vec{n}$, якщо

$$(\vec{m}+3\vec{n})\cdot(\vec{m}-\vec{n})=-11,\ |\vec{m}|=2,\ |\vec{n}|=3.$$

16.37.•• Знайдіть кут між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$, якщо $(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}+2\vec{b})=\frac{3}{2}$, $|\vec{a}|=|\vec{b}|=1$.

16.38.•• У трикутнику ABC відомо, що $\angle C = 90°$, $AC = 1$, $BC=\sqrt{2}$. Доведіть, що його медіани AK і CM перпендикулярні.

16.39.•• У чотирикутнику $ABCD$ діагоналі AC і BD перпендикулярні та перетинаються в точці O. Відомо, що $OB = OC = 1$, $OA = 2$, $OD = 3$. Знайдіть кут між прямими AB і DC.

16.40.•• У трикутнику ABC проведено медіану BD. Відомо, що $\angle DBC = 90°$, $BD = \frac{\sqrt{3}}{4}AB$. Знайдіть кут ABD.

16.41.* На сторонах AB і BC трикутника ABC у зовнішній бік побудовано квадрати $ABMN$ і $BCKF$. Доведіть, що медіана BD трикутника ABC перпендикулярна до прямої MF.

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

16.42. Точка M — середина діагоналі AC опуклого чотирикутника $ABCD$ (рис. 16.13). Доведіть, що чотирикутники $ABMD$ і $CBMD$ рівновеликі.

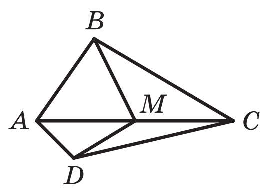


Рис. 16.13

16.43. Перпендикуляр, проведений із точки перетину діагоналей ромба, ділить його сторону на відрізки, один з яких на 7 см більший за другий. Знайдіть периметр ромба, якщо його висота дорівнює 24 см.

16.44. На висоті правильного трикутника зі стороною $6\sqrt{3}$ см як на діаметрі побудовано коло. Знайдіть довжину дуги цього кола, яка розташована поза трикутником.

ЗАВДАННЯ № 4 «ПЕРЕВІРТЕ СЕБЕ» В ТЕСТОВІЙ ФОРМІ

1. Яка з наведених величин є векторною?

А) Маса; В) швидкість;
Б) об'єм; Г) час.

2. Чому дорівнює модуль вектора, початок і кінець якого збігаються?

А) 1; В) 5;
Б) −1; Г) 0.

3. Дано паралелограм $ABCD$. Яка з даних рівностей є правильною?

А) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$; В) $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{DA}$;
Б) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$; Г) $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$.

4. Відомо, що $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MB}$. Яке з даних тверджень є правильним?

А) Точка B — середина відрізка AM;
Б) точка A — середина відрізка MB;
В) точка M — середина відрізка AB;
Г) точка M — вершина рівнобедреного трикутника AMB.

5. Дано точки A (−3; 4) і B (1; −8). Точка M — середина відрізка AB. Знайдіть координати вектора $\overrightarrow{AM}$.

А) (2; −6); В) (−2; −6);
Б) (−2; 6); Г) (6; −2).

6. При якому значенні x вектори $\vec{a}\,(x; 2)$ і $\vec{b}\,(-4; 8)$ колінеарні?

А) −1; В) 0;
Б) 1; Г) $\frac{1}{2}$.

7. Яка з даних рівностей є правильною?

А) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{CA}$;
Б) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC}$;
В) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BC}$;
Г) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{DA}$.

8. Дано вектор $\vec{a}\left(\sqrt{3}; -2\right)$. Який із векторів дорівнює вектору $\sqrt{3}\vec{a}$?

А) $\vec{m}\left(1; -2\sqrt{3}\right)$; В) $\vec{p}\,(3; -2)$;
Б) $\vec{n}\left(-3; -2\sqrt{3}\right)$; Г) $\vec{q}\left(3; -2\sqrt{3}\right)$.

9. Точка M — середина сторони BC трикутника ABC. Яка з даних рівностей є правильною?

А) $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$;

Б) $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$;

В) $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$;

Г) $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$.

10. Знайдіть скалярний добуток векторів $\vec{a}\,(2; -3)$ і $\vec{b}\,(3; -2)$.

А) 12; В) 0;
Б) −12; Г) 6.

11. При якому значенні x вектори $\vec{a}\,(2x; -3)$ і $\vec{b}\,(1; 4)$ перпендикулярні?

А) −6; В) 12;
Б) 3; Г) 6.

12. Знайдіть косинус кута між векторами $\vec{a}\,(5; -12)$ і $\vec{b}\,(-3; 4)$.

А) $\frac{63}{65}$; В) $-\frac{63}{65}$;
Б) $\frac{65}{63}$; Г) $\frac{1}{2}$.

ГОЛОВНЕ В ПАРАГРАФІ 4

Вектор

Якщо вказано, яка точка є початком відрізка, а яка точка — його кінцем, то такий відрізок називають напрямленим відрізком або вектором.

Колінеарні вектори

Ненульові вектори називають колінеарними, якщо вони лежать на паралельних прямих або на одній прямій. Нульовий вектор вважають колінеарним будь-якому вектору.

Рівні вектори

Ненульові вектори називають рівними, якщо їхні модулі рівні й вони співнапрямлені. Будь-які два нульових вектори рівні. Рівні вектори мають рівні відповідні координати. Якщо відповідні координати векторів рівні, то рівні й самі вектори.

Координати вектора

Якщо точки A $(x_1;\ y_1)$ і B $(x_2;\ y_2)$ відповідно є початком і кінцем вектора $\vec{a}$, то числа $x_2 - x_1$ и $y_2 - y_1$ дорівнюють відповідно першій і другій координатам вектора $\vec{a}$.

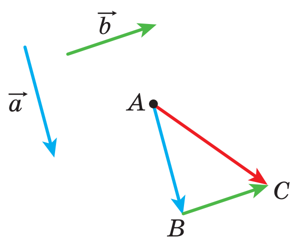
Модуль вектора

Якщо вектор $\vec{a}$ має координати $(a_1;\ a_2)$, то $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$.

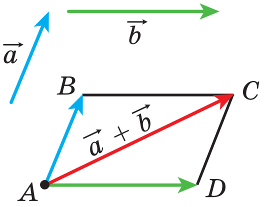
Правила додавання двох векторів

Правило трикутника

Відкладемо від довільної точки A вектор $\overrightarrow{AB}$, рівний вектору $\vec{a}$, а від точки B — вектор $\overrightarrow{BC}$, рівний вектору $\vec{b}$. Вектор $\overrightarrow{AC}$ — сума векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$. Для будь-яких трьох точок A, B і C виконується рівність $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.



Правило паралелограма



Відкладемо від довільної точки A вектор $\overrightarrow{AB}$, рівний вектору $\vec{a}$, і вектор $\overrightarrow{AD}$, рівний вектору $\vec{b}$. Побудуємо паралелограм $ABCD$. Тоді вектор $\overrightarrow{AC}$ — сума векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$.

Координати суми векторів

Якщо координати векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ відповідно дорівнюють $(a_1; a_2)$ і $(b_1; b_2)$, то координати вектора $\vec{a}+\vec{b}$ дорівнюють $(a_1+b_1; a_2+b_2)$.

Властивості додавання векторів

Для будь-яких векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$ виконуються рівності:
1) $\vec{a}+\vec{0}=\vec{a}$;
2) $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$ — переставна властивість;
3) $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$ — сполучна властивість.

Різниця векторів

Різницею векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називають такий вектор $\vec{c}$, сума якого з вектором $\vec{b}$ дорівнює вектору $\vec{a}$.
Для будь-яких трьох точок O, A і B виконується рівність $\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{BA}$.

Координати різниці векторів

Якщо координати векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ відповідно дорівнюють $(a_1; a_2)$ і $(b_1; b_2)$, то координати вектора $\vec{a}-\vec{b}$ дорівнюють $(a_1-b_1; a_2-b_2)$.

Протилежні вектори

Два ненульових вектори називають протилежними, якщо їхні модулі рівні й вектори протилежно напрямлені.
Для будь-яких точок A і B виконується рівність $\overrightarrow{AB}=-\overrightarrow{BA}$.

Множення вектора на число

Добутком ненульового вектора $\vec{a}$ і числа k, відмінного від нуля, називають такий вектор $\vec{b}$, що:

1) $|\vec{b}| = |k| |\vec{a}|$;

2) якщо $k > 0$, то $\vec{b} \uparrow\uparrow \vec{a}$; якщо $k < 0$, то $\vec{b} \uparrow\downarrow \vec{a}$.

Якщо $\vec{a} = \vec{0}$ або $k = 0$, то вважають, що $k\vec{a} = \vec{0}$.

Якщо вектор $\vec{a}$ має координати $(a_1; a_2)$, то вектор $k\vec{a}$ має координати $(ka_1; ka_2)$.

Властивості колінеарних векторів

Якщо вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ колінеарні, причому $\vec{a} \neq \vec{0}$, то існує таке число k, що $\vec{b} = k\vec{a}$.

Якщо вектори $\vec{a}\,(a_1; a_2)$ і $\vec{b}\,(b_1; b_2)$ колінеарні, причому $\vec{a} \neq \vec{0}$, то існує таке число k, що $b_1 = ka_1$ і $b_2 = ka_2$.

Властивості множення вектора на число

Для будь-яких чисел k, m і будь-яких векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$ виконуються рівності:

1) $(km)\vec{a} = k(m\vec{a})$ — сполучна властивість;

2) $(k+m)\vec{a} = k\vec{a} + m\vec{a}$ — перша розподільна властивість;

3) $k(\vec{a} + \vec{b}) = k\vec{a} + k\vec{b}$ — друга розподільна властивість.

Скалярний добуток векторів

Скалярним добутком двох векторів називають добуток їхніх модулів і косинуса кута між ними:
$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos\angle(\vec{a}, \vec{b})$.

Скалярний добуток векторів $\vec{a}\,(a_1; a_2)$ і $\vec{b}\,(b_1; b_2)$ можна обчислити за формулою $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2$.

Властивості скалярного добутку

Для будь-яких векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ і будь-якого числа k виконуються рівності:

1) $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$ — переставна властивість;

2) $\left(k\vec{a}\right) \cdot \vec{b} = k\left(\vec{a} \cdot \vec{b}\right)$ — сполучна властивість;

3) $\left(\vec{a} + \vec{b}\right) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$ — розподільна властивість.

Умова перпендикулярності двох векторів

Скалярний добуток двох ненульових векторів дорівнює нулю тоді й тільки тоді, коли ці вектори перпендикулярні.

Косинус кута між двома векторами

Косинус кута між ненульовими векторами $\vec{a}$ $(a_1; a_2)$ і $\vec{b}$ $(b_1; b_2)$ можна обчислити за формулою

$$\cos \angle\left(\vec{a}, \vec{b}\right) = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2}}.$$

ГЕОМЕТРИЧНІ ПЕРЕТВОРЕННЯ §5*

У цьому параграфі ви дізнаєтеся, що таке перетворення фігури. Ознайомитеся з такими видами перетворень, як паралельне перенесення, центральна симетрія, осьова симетрія, поворот, гомотетія, подібність.

Ви навчитеся застосовувати властивості перетворень під час розв'язування задач і доведення теорем.

17. Рух (переміщення) фігури. Паралельне перенесення

Приклад 1. На рисунку 17.1 зображено відрізок AB, пряму a і точку O, яка не належить ні прямій a, ні прямій AB. Кожній точці X відрізка AB поставимо у відповідність точку X_1 прямої a так, щоб точки O, X і X_1 лежали на одній прямій. Точці A відповідатиме точка A_1, точці B — точка B_1. Зрозуміло, що всі такі точки X_1 утворюють відрізок A_1B_1.

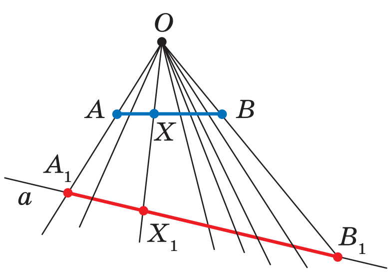


Рис. 17.1

Ми вказали правило, за допомогою якого кожній точці X відрізка AB поставлено у відповідність єдину точку X_1 відрізка A_1B_1. У цьому разі говорять, що відрізок A_1B_1 отримано в результаті **перетворення** відрізка AB.

Приклад 2. На рисунку 17.2 зображено півколо AB і пряму a, паралельну діаметру AB. Кожній точці X півкола поставимо у відповідність точку X_1 прямої a так, щоби пряма XX_1 була перпендикулярна до прямої a. Зрозуміло, що всі такі точки X_1 утворюють відрізок A_1B_1. У цьому разі говорять, що відрізок A_1B_1 отримано в результаті перетворення півкола AB.

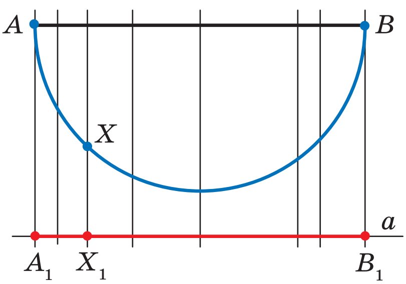


Рис. 17.2

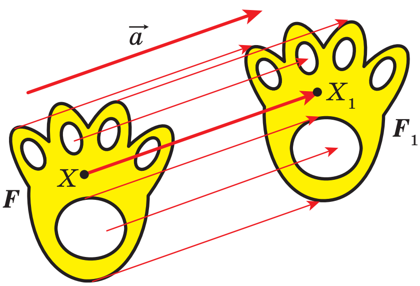


Рис. 17.3

Приклад 3. Нехай задано деяку фігуру F і вектор $\vec{a}$ (рис. 17.3). Кожній точці X фігури F поставимо у відповідність точку X_1 таку, що $\overrightarrow{XX_1} = \vec{a}$. Унаслідок такого перетворення фігури F отримаємо фігуру F_1 (рис. 17.3). Таке перетворення фігури F називають **паралельним перенесенням на вектор** $\vec{a}$.

Узагальнимо наведені приклади.

Нехай задано деяку фігуру F. Кожній точці фігури F поставимо у відповідність (зіставимо) за певним правилом деяку точку. Усі отримані зіставлені точки утворюють фігуру F_1. Говорять, що **фігуру F_1 отримано в результаті перетворення фігури F**. При цьому фігуру F_1 називають **образом** фігури F, а фігуру F — **прообразом** фігури F_1.

Так, у прикладі 1 відрізок A_1B_1 є образом відрізка AB. Точка X_1 є образом точки X. Відрізок AB — це прообраз відрізка A_1B_1.

Звернемо увагу на те, що в прикладі 3 фігура F дорівнює своєму образу F_1. Перетворення, описані в прикладах 1 і 2, такої властивості не мають.

Які ж властивості повинне мати перетворення, щоб образ і прообраз були рівними фігурами? Виявляється, що достатньо лише однієї властивості: перетворення має зберігати відстань між точками, тобто якщо A і B — довільні точки фігури F, а точки A_1 і B_1 — їхні образи, то має виконуватися рівність $AB = A_1B_1$.

Означення. **Перетворення фігури F, яке зберігає відстань між точками, називають рухом (переміщенням) фігури F.**

Якщо кожній точці X фігури F поставлено у відповідність цю саму точку X, то таке перетворення фігури F називають **тотожним**. При тотожному перетворенні образом фігури F є сама фігура F. Очевидно, що тотожне перетворення є рухом.

Ми давно використовуємо поняття «рівність фігур», хоча не давали йому строгого означення.

На те, що рух пов'язаний із рівністю фігур, указують такі властивості руху.

Якщо перетворення є рухом, то:

- *образом прямої є пряма;*
- *образом відрізка є відрізок, рівний даному;*
- *образом кута є кут, рівний даному;*
- *образом трикутника є трикутник, рівний даному.*

Доведення цих властивостей виходить за межі розглядуваного курсу геометрії.

Властивості руху підказують таке означення.

Означення. **Дві фігури називають рівними, якщо існує рух, при якому одна з даних фігур є образом другої.**

Запис $F = F_1$ означає, що фігури F і F_1 рівні.

Якщо існує рух, при якому фігура F_1 є образом фігури F, то обов'язково існує рух, при якому фігура F є образом фігури F_1. Такі рухи називають **взаємно оберненими**.

Зауваження. Раніше рівними фігурами ми називали такі фігури, які збігалися при накладанні. Термін «накладання» інтуїтивно зрозумілий, і в нашому уявленні він пов'язаний із накладанням реальних тіл. Але геометричні фігури не можна накласти в буквальному розумінні цього слова. Тепер накладання фігури F на фігуру F_1 можна розглядати як рух фігури F, при якому її образом є фігура F_1.

Термін «рух» також асоціюється з певною фізичною дією: зміною положення тіла без деформації. Саме із цим пов'язана поява цього терміна в математиці. Проте в геометрії предметом дослідження є не процес, який відбувається в часі, а лише властивості фігури та її образу.

Те, що зображені на рисунку 17.3 фігури F і F_1 рівні, зрозуміло з наочного сприйняття. Строге обґрунтування цього факту дає така теорема.

Теорема 17.1 (властивість паралельного перенесення). ***Паралельне перенесення є рухом.***

Доведення. Нехай $A\ (x_1;\ y_1)$ і $B\ (x_2;\ y_2)$ — довільні точки фігури F (рис. 17.4), точки A_1 і B_1 — їхні відповідні образи при паралельному перенесенні на вектор $\vec{a}\ (m;\ n)$. Доведемо, що $AB = A_1B_1$.

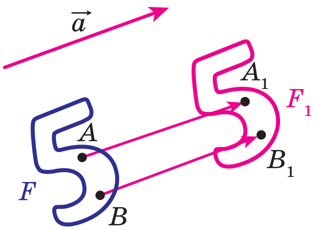


Рис. 17.4

Маємо: $\overrightarrow{AA_1} = \overrightarrow{BB_1} = \vec{a}$. Вектори $\overrightarrow{AA_1}$ і $\overrightarrow{BB_1}$ мають координати $(m;\ n)$. Отже, координатами точок A_1 і B_1 є відповідно пари чисел $(x_1 + m; y_1 + n)$ і $(x_2 + m; y_2 + n)$.

Знайдемо відстань між точками A і B:

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

Знайдемо відстань між точками A_1 і B_1:

$$A_1B_1 = \sqrt{(x_2 + m - x_1 - m)^2 + (y_2 + n - y_1 - n)^2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

Отже, ми показали, що $AB = A_1B_1$, тобто паралельне перенесення зберігає відстань між точками. ◀

Наслідок. ***Якщо фігура F_1 — образ фігури F при паралельному перенесенні, то $F_1 = F$.***

Цю властивість використовують при створенні малюнків на тканинах, шпалерах, покриттях для підлоги тощо (рис. 17.5).

Рис. 17.5

Якщо фігура F_1 є образом фігури F при паралельному перенесенні на вектор $\vec{a}$, то фігура F є образом фігури F_1 при паралельному перенесенні на вектор $-\vec{a}$ (рис. 17.6). Паралельні перенесення на вектори $\vec{a}$ і $-\vec{a}$ є взаємно оберненими рухами.

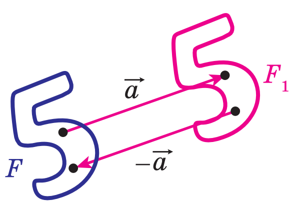


Рис. 17.6

Задача 1. Кожній точці $X(x; y)$ фігури F поставлено у відповідність точку $X_1\ (x + m;\ y + n)$, де m і n — задані числа. Доведіть, що таке перетворення фігури F є паралельним перенесенням на вектор $\vec{a}\,(m; n)$.

Розв'язання. Розглянемо вектор $\vec{a}\,(m; n)$. Зауважимо, що координати вектора $\overrightarrow{XX_1}$ дорівнюють $(m; n)$, тобто $\overrightarrow{XX_1} = \vec{a}$. Отже, описане перетворення фігури F — паралельне перенесення на вектор $\vec{a}$. ◀

Задача 2. Точка $A_1\,(-2; 3)$ є образом точки $A\,(-1; 2)$ при паралельному перенесенні на вектор $\vec{a}$. Знайдіть координати вектора $\vec{a}$ і координати образу точки $B\,(-7; -3)$.

Розв'язання. З умови випливає, що $\overrightarrow{AA_1} = \vec{a}$. Звідси $\vec{a}\,(-1; 1)$.

Нехай $B_1\,(x; y)$ — образ точки $B\,(-7; -3)$. Тоді $\overrightarrow{BB_1} = \vec{a}$, тобто $x + 7 = -1$ і $y + 3 = 1$. Звідси $x = -8$, $y = -2$.

Відповідь: $\vec{a}\,(-1; 1)$, $B_1\,(-8; -2)$. ◀

Задача 3. Дано кут ABC і пряму p, не паралельну жодній зі сторін цього кута (рис. 17.7). Побудуйте пряму p_1, паралельну прямій p, так, щоб сторони кута відтинали на ній відрізок заданої довжини a.

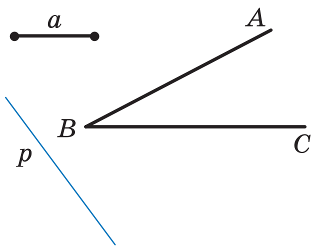


Рис. 17.7

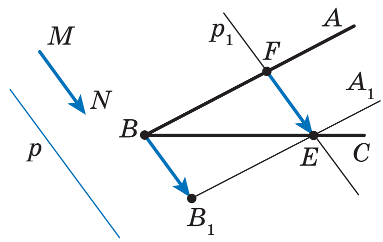


Рис. 17.8

Розв'язання. Розглянемо вектор $\overrightarrow{MN}$ такий, що $MN \parallel p$ і $|\overrightarrow{MN}| = a$ (рис. 17.8). Побудуємо промінь B_1A_1, який є образом променя BA при паралельному перенесенні на вектор $\overrightarrow{MN}$. Позначимо точку перетину променів BC і B_1A_1 буквою E. Нехай F — прообраз точки E при паралельному перенесенні, що розглядається. Тоді $\overrightarrow{FE} = \overrightarrow{MN}$, тобто $|\overrightarrow{FE}| = a$ і $FE \parallel p$.

Наведені міркування підказують такий алгоритм побудови:

1) знайти образ променя BA при паралельному перенесенні на вектор $\overrightarrow{MN}$;
2) позначити точку перетину променя BC із побудованим образом;
3) через знайдену точку провести пряму p_1, паралельну прямій p. Пряма p_1 буде шуканою. ◀

1. Опишіть, що таке перетворення фігури.
2. Наведіть приклади перетворення фігур.
3. Опишіть перетворення фігури F, яке називають паралельним перенесенням на вектор $\vec{a}$.
4. У якому разі фігуру F_1 називають образом фігури F, а фігуру F — прообразом фігури F_1?
5. Яке перетворення фігури називають рухом?
6. Яке перетворення фігури називають тотожним?
7. Сформулюйте властивості руху.
8. Які дві фігури називають рівними?
9. Опишіть рухи, які називають взаємно оберненими.
10. Сформулюйте властивість паралельного перенесення.
11. Якими рухами є паралельні перенесення на вектори $\vec{a}$ і $-\vec{a}$?

ПРАКТИЧНІ ЗАВДАННЯ

17.1.° На рисунку 17.9 зображено кут AOB і пряму p, не паралельну його сторонам. Кожній точці X сторони OA поставлено у відповідність таку точку X_1 сторони OB, що $XX_1 \parallel p$ (точці O поставлено у відповідність точку O). Побудуйте образ точки M і прообраз точки K при даному перетворенні променя OA. Яка фігура є образом променя OA?

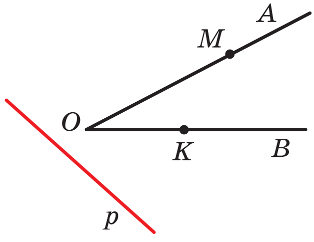


Рис. 17.9

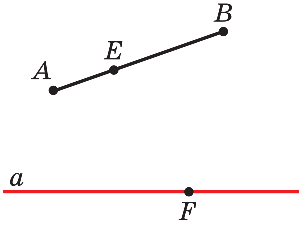


Рис. 17.10

17.2.° На рисунку 17.10 зображено відрізок AB і пряму a. Кожній точці X відрізка AB поставлено у відповідність основу перпендикуляра, опущеного з точки X на пряму a. Побудуйте образ точки E і прообраз точки F при даному перетворенні відрізка AB. Чи існують точки прямої a, які не мають прообразу? Побудуйте образ відрізка AB.

17.3.° Побудуйте образи відрізка AB і променя OM при паралельному перенесенні на вектор $\vec{a}$ (рис. 17.11).

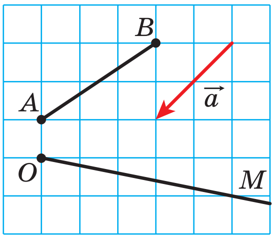


Рис. 17.11

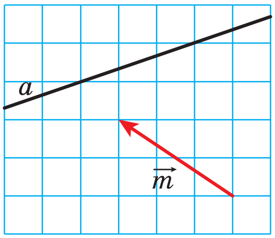


Рис. 17.12

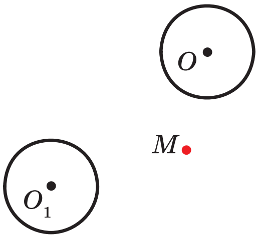


Рис. 17.13

17.4.° На рисунку 17.12 пряма a є образом деякої прямої при паралельному перенесенні на вектор $\vec{m}$. Побудуйте прообраз прямої a.

17.5.° Коло із центром O_1 є образом кола із центром O при паралельному перенесенні на вектор $\vec{a}$ (рис. 17.13). Відкладіть вектор $\vec{a}$ від точки M.

17.6.• Побудуйте образ параболи $y = x^2$ при паралельному перенесенні на вектор: 1) $\vec{a}\,(0; 2)$; 2) $\vec{b}\,(-1; 0)$; 3) $\vec{c}\,(-1; 2)$. Запишіть рівняння образу параболи $y = x^2$ при даному паралельному перенесенні.

17.7.• Побудуйте образ кола $x^2 + y^2 = 4$ при паралельному перенесенні на вектор: 1) $\vec{a}\,(2; 0)$; 2) $\vec{b}\,(0; -1)$; 3) $\vec{c}\,(2; -1)$. Запишіть рівняння образу кола $x^2 + y^2 = 4$ при даному паралельному перенесенні.

17.8.• Пряма a дотикається до півкола AB із центром у точці O (рис. 17.14). Задайте яке-небудь перетворення, при якому пряма a є образом півкола AB з «виколотими» точками A і B.

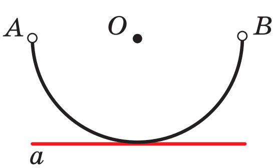


Рис. 17.14

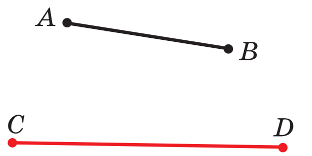


Рис. 17.15

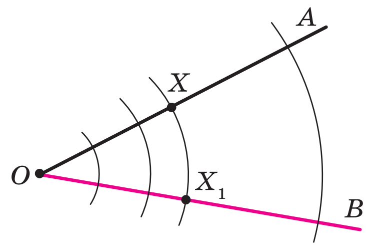


Рис. 17.16

17.9.• Задайте яке-небудь перетворення, при якому відрізок CD є образом відрізка AB (рис. 17.15).

ВПРАВИ

17.10.° Розглянемо коло радіуса r із центром у точці O. Кожній точці X кола поставимо у відповідність точку X_1, яка належить радіусу OX, таку, що $OX_1 = \frac{1}{2}r$. Яка фігура є образом заданого кола? Чи є рухом описане перетворення?

17.11.° Дано кут AOB (рис. 17.16). Кожній точці X сторони OA поставимо у відповідність точку X_1, яка належить стороні OB і лежить на колі радіуса OX із центром O (точці O поставимо у відповідність точку O). Яка фігура є образом сторони OA? Доведіть, що описане перетворення є рухом.

17.12.° Дано кут MON. Кожній точці X сторони OM поставимо у відповідність таку точку X_1 сторони ON, що пряма XX_1 перпендикулярна до бісектриси кута MON (точці O поставимо у відповідність точку O). Доведіть, що описане перетворення є рухом.

17.13.° Дано пряму a і відрізок AB, який не має з нею спільних точок. Кожній точці X відрізка AB поставимо у відповідність основу перпендикуляра, опущеного з точки X на пряму a. При якому взаємному розміщенні прямої a та відрізка AB описане перетворення є рухом?

17.14.° Точки A_1 і B_1 не належать прямій AB і є образами відповідно точок A і B при паралельному перенесенні прямої AB. Доведіть, що чотирикутник AA_1B_1B — паралелограм.

17.15.° Точки A_1 і B_1 є образами відповідно точок A і B при паралельному перенесенні відрізка AB. Знайдіть відрізок A_1B_1, якщо $AB = 5$ см.

17.16.° Вектор $\vec{m}$ паралельний прямій a. Яка фігура є образом прямої a при її паралельному перенесенні на вектор $\vec{m}$?

17.17.° Дано паралелограм $ABCD$. Який вектор задає паралельне перенесення, при якому сторона AD є образом сторони BC?

17.18.° Чи існує паралельне перенесення рівностороннього трикутника ABC, при якому сторона AB є образом сторони BC?

17.19.° Знайдіть точки, які є образами точок A (−2; 3) і B (1; −4) при паралельному перенесенні на вектор $\vec{a}$ (−1; −3).

17.20.° Чи існує паралельне перенесення, при якому образом точки A (1; 3) є точка A_1 (4; 0), а образом точки B (−2; 1) — точка B_1 (1; 4)?

17.21.° При паралельному перенесенні на вектор $\vec{a}$ (2; −1) образом точки A є точка A_1 (−3; 4). Знайдіть координати точки A.

17.22.° Точка M_1 (x; 2) є образом точки M (3; y) при паралельному перенесенні, при якому точка A (2; 3) є образом початку координат. Знайдіть x і y.

17.23.• Скільки існує паралельних перенесень прямої a, при яких її образом є пряма a?

17.24.• Розглянемо фігуру, що складається з усіх точок, які належать сторонам прямокутника. Опишіть яке-небудь перетворення цієї фігури, при якому її образом є коло.

17.25.• Розглянемо фігуру, що складається з усіх точок, які належать сторонам прямокутника. Опишіть яке-небудь перетворення цієї фігури, при якому її образом є фігура, яка складається з усіх точок сторін ромба.

17.26.• Відомо, що при перетворенні фігури F її образом є ця сама фігура F. Чи можна стверджувати, що це перетворення є тотожним?

17.27.• Дано точки A (3; −2) і B (5; −4). При паралельному перенесенні відрізка AB образом його середини є точка M_1 (−4; 3). Знайдіть образи точок A і B при такому паралельному перенесенні.

17.28.• Точки A (1; 3), B (2; 6), C (−3; 1) є вершинами паралелограма $ABCD$. При паралельному перенесенні паралелограма $ABCD$ образом точки перетину його діагоналей є точка O_1 (−2; −4). Знайдіть образи точок A, B, C і D при такому паралельному перенесенні.

17.29.• Знайдіть рівняння кола, яке є образом кола $x^2 + y^2 = 1$ при паралельному перенесенні на вектор $\vec{a}$ (−3; 4).

17.30.• Знайдіть рівняння параболи, яка є образом параболи $y = x^2$ при паралельному перенесенні на вектор $\vec{a}$ (2; −3).

17.31.•• Побудуйте трапецію за основами та діагоналями.

17.32.•• Побудуйте трапецію за чотирма сторонами.

17.33.•• Побудуйте відрізок, рівний і паралельний даному відрізку AB, так, щоб один його кінець належав даній прямій, а другий — даному колу.

17.34.•• Побудуйте хорду даного кола, яка дорівнює та паралельна даному відрізку AB.

17.35.* Побудуйте чотирикутник, у якого протилежні сторони попарно непаралельні, за чотирма кутами та двома протилежними сторонами.

17.36.* У якому місці потрібно побудувати міст MN через річку, яка розділяє два населених пункти A і B (рис. 17.17), щоби шлях $AMNB$ був найкоротшим (береги річки вважаємо паралельними прямими, міст перпендикулярний до берегів річки)?

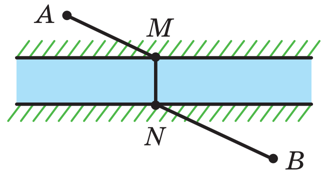


Рис. 17.17

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

17.37. Через кожну вершину трикутника проведено пряму, паралельну протилежній стороні. Чому дорівнює периметр трикутника, який утворився при цьому, якщо периметр даного трикутника дорівнює 18 см?

17.38. Доведіть, що чотирикутник з вершинами A (−3; −4), B (0; 3), C (7; 6) і D (4; −1) є ромбом, і знайдіть його площу.

17.39. У прямокутну трапецію вписано коло. Точка дотику поділяє більшу з бічних сторін трапеції на відрізки 4 см і 25 см. Знайдіть площу трапеції.

СПОСТЕРІГАЙТЕ, РИСУЙТЕ, КОНСТРУЮЙТЕ, ФАНТАЗУЙТЕ

17.40. Усередині правильного шестикутника зі стороною 1 м розташовано 7 точок. Доведіть, що серед них знайдуться 2 точки, відстань між якими не більша за 1 м.

18. Осьова симетрія

Означення. **Точки A і A_1 називають симетричними відносно прямої l, якщо пряма l є серединним перпендикуляром відрізка AA_1 (рис. 18.1). Якщо точка A належить прямій l, то її вважають симетричною самій собі відносно прямої l.**

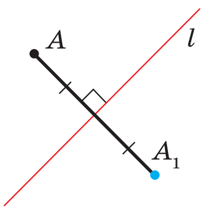


Рис. 18.1

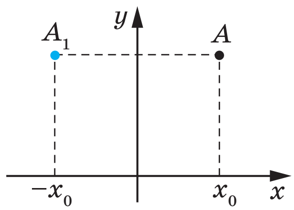


Рис. 18.2

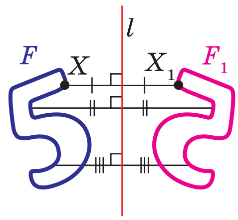


Рис. 18.3

Наприклад, точки A і A_1, у яких ординати рівні, а абсциси — протилежні числа, симетричні відносно осі ординат (рис. 18.2).

Розглянемо фігуру F і пряму l. Кожній точці X фігури F поставимо у відповідність симетричну їй відносно прямої l точку X_1. Унаслідок такого перетворення фігури F отримаємо фігуру F_1 (рис. 18.3). Таке перетворення фігури F називають **осьовою симетрією відносно прямої l**. Пряму l називають **віссю симетрії**. Говорять, що фігури F і F_1 **симетричні відносно прямої** l.

Теорема 18.1 (властивість осьової симетрії). ***Осьова симетрія є рухом.***

Доведення. ⊙ Виберемо систему координат так, щоб вісь симетрії збігалася з віссю ординат. Нехай A $(x_1;\ y_1)$ і B $(x_2;\ y_2)$ — довільні точки фігури F. Тоді точки A_1 $(-x_1;\ y_1)$ і B_1 $(-x_2;\ y_2)$ — їхні відповідні образи при осьовій симетрії відносно осі ординат. Маємо:

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2};$$

$$A_1B_1 = \sqrt{(-x_2 - (-x_1))^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(-x_2 + x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = AB.$$

Ми отримали, що $AB = A_1B_1$, тобто осьова симетрія зберігає відстань між точками. Отже, осьова симетрія є рухом. ◀

Наслідок. ***Якщо фігури F і F_1 симетричні відносно прямої, то $F = F_1$.***

Означення. **Фігуру називають симетричною відносно прямої l, якщо для кожної точки даної фігури точка, симетрична їй відносно прямої l, також належить цій фігурі.**

Пряму l називають **віссю симетрії фігури**. Також говорять, що **фігура має вісь симетрії**.

Наведемо приклади фігур, які мають вісь симетрії.

На рисунку 18.4 зображено рівнобедрений трикутник. Пряма, яка містить його висоту, проведену до основи, є віссю симетрії трикутника.

Будь-який кут має вісь симетрії — це пряма, яка містить його бісектрису (рис. 18.5).

Рівносторонній трикутник має три осі симетрії (рис. 18.6).

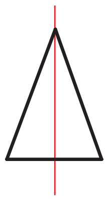


Рис. 18.4

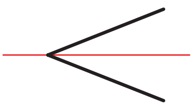


Рис. 18.5

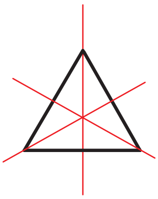


Рис. 18.6

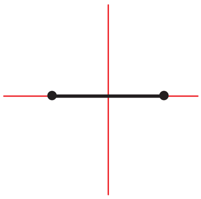


Рис. 18.7

Дві осі симетрії має відрізок: це його серединний перпендикуляр і пряма, яка містить цей відрізок (рис. 18.7).

Квадрат має чотири осі симетрії (рис. 18.8).

Існують фігури, які мають безліч осей симетрії, наприклад коло. Будь-яка пряма, що проходить через центр кола, є його віссю симетрії (рис. 18.9).

Безліч осей симетрії має і пряма: сама пряма та будь-яка пряма, перпендикулярна до неї, є її осями симетрії.

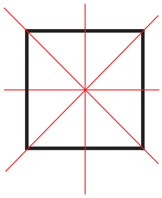


Рис. 18.8

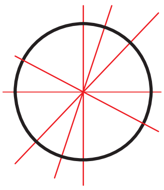


Рис. 18.9

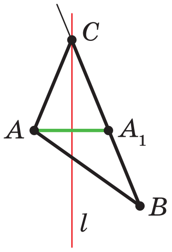


Рис. 18.10

Задача 1. Накреслили нерівнобедрений трикутник ABC. Провели пряму l, яка містить бісектрису кута C. Потім рисунок витерли, залишивши лише точки A і B та пряму l. Відновіть трикутник ABC.

Розв'язання. Оскільки пряма l є віссю симетрії кута ACB, то точка A_1 — образ точки A при симетрії відносно прямої l — належить променю CB. Тоді перетином прямих l і BA_1 є вершина C шуканого трикутника ABC (рис. 18.10).

Ці міркування підказують, як побудувати шуканий трикутник: будуємо точку A_1, симетричну точці A відносно прямої l. Знаходимо вершину C як точку перетину прямих l і BA_1. ◀

Задача 2. Точка O належить гострому куту ABC (рис. 18.11). На сторонах BA і BC кута знайдіть такі точки E і F, щоби периметр трикутника OEF був найменшим.

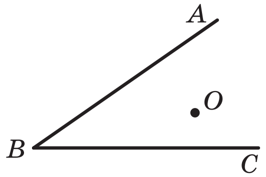


Рис. 18.11

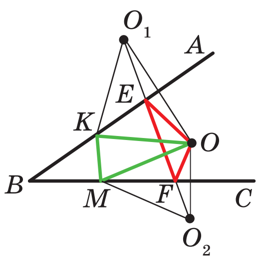


Рис. 18.12

Розв'язання. Нехай точки O_1 і O_2 — образи точки O при симетріях відносно прямих BA і BC відповідно (рис. 18.12), а пряма O_1O_2 перетинає сторони BA і BC у точках E і F відповідно. Доведемо, що точки E і F — шукані.

Зауважимо, що відрізки EO_1 і EO симетричні відносно прямої BA. Отже, $EO_1 = EO$. Аналогічно $FO = FO_2$. Тоді периметр трикутника OEF дорівнює довжині відрізка O_1O_2.

Покажемо, що побудований трикутник має найменший периметр з можливих. Розглянемо трикутник KOM, де K і M — довільні точки відповідно променів BA і BC, причому точка K не збігається з точкою E або точка M не збігається з точкою F. Зрозуміло, що $KO = KO_1$ і $MO = MO_2$. Тоді периметр трикутника KOM дорівнює сумі $O_1K + KM + MO_2$. Проте $O_1K + KM + MO_2 \geqslant O_1O_2$. ◀

?

1. Які точки називають симетричними відносно прямої l? Як називають пряму l?
2. Які фігури називають симетричними відносно прямої l?
3. Сформулюйте властивість осьової симетрії.
4. Яку властивість мають фігури, симетричні відносно прямої?
5. Про яку фігуру кажуть, що вона має вісь симетрії?
6. Наведіть приклади фігур, які мають вісь симетрії.

ПРАКТИЧНІ ЗАВДАННЯ

18.1.° Побудуйте образи фігур, зображених на рисунку 18.13, при симетрії відносно прямої l.

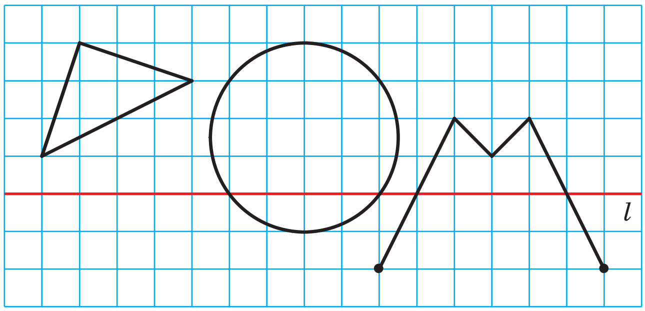


Рис. 18.13

18.2.° Накресліть трикутник. Побудуйте трикутник, симетричний йому відносно прямої, яка містить одну з його середніх ліній.

18.3.° Точки A і B симетричні відносно прямої l (рис. 18.14). Побудуйте пряму l.

Рис. 18.14

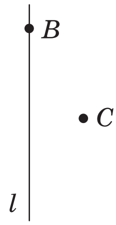


Рис. 18.15

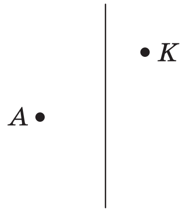


Рис. 18.16

СЕЗОН ДОЩІВ

Рис. 18.17

18.4.• Проведіть прямі a і a_1, які перетинаються. Побудуйте пряму, відносно якої пряма a_1 буде симетричною прямій a. Скільки розв'язків має задача?

18.5.• Проведіть паралельні прямі a і a_1. Побудуйте пряму, відносно якої пряма a_1 буде симетричною прямій a.

18.6.• Побудуйте ромб $ABCD$ за його вершинами B і C та прямою l, яка містить його діагональ BD (рис. 18.15).

18.7.• Побудуйте рівнобедрений трикутник ABC за вершиною A, точкою K, яка належить бічній стороні BC, і прямою, яка містить висоту, проведену до основи AB (рис. 18.16).

18.8.• Подивіться на рисунок 18.17 через скляну пробірку, заповнену водою. Чому деякі букви в другому слові виявилися перевернутими, а в першому — ні?

18.9.•• Кола із центрами O_1 і O_2 мають дві спільні точки (рис. 18.18). За допомогою тільки циркуля побудуйте кола, симетричні даним відносно прямої AB.

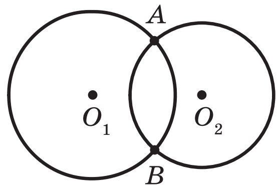


Рис. 18.18

ВПРАВИ

18.10.° Пряма l проходить через середину відрізка AB. Чи обов'язково точки A і B є симетричними відносно прямої l?

18.11.° Доведіть, що пряма, яка містить медіану рівнобедреного трикутника, проведену до основи, є його віссю симетрії.

18.12.° На рисунку 18.19 зображено рівнобедрений трикутник ABC і пряму l, яка містить його висоту, проведену до основи AC. Відрізки AM і CN — медіани трикутника. Укажіть образи точок A і B, медіани CN і сторони AC при симетрії відносно прямої l.

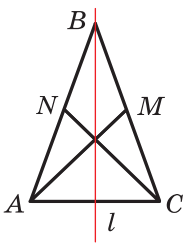


Рис. 18.19

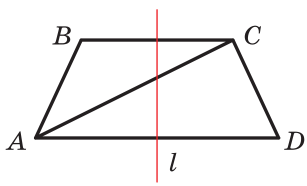


Рис. 18.20

18.13.° Доведіть, що пряма, яка проходить через середини основ рівнобічної трапеції, є її віссю симетрії.

18.14.° На рисунку 18.20 зображено рівнобічну трапецію $ABCD$ і пряму l, яка проходить через середини її основ. Укажіть образи точок B і D, діагоналі AC і основи BC при симетрії відносно прямої l.

18.15.° Доведіть, що прямі, які містять діагоналі ромба, є його осями симетрії.

18.16.° Доведіть, що прямі, які проходять через середини протилежних сторін прямокутника, є його осями симетрії.

18.17.° Точки A_1 і B_1 є відповідно образами точок A і B при осьовій симетрії. Відомо, що $AB = 5$ см. Знайдіть відрізок A_1B_1.

18.18.° Доведіть, що пряма, яка містить бісектрису кута, є його віссю симетрії.

18.19.° Знайдіть координати точок, симетричних точкам A $(-2; 1)$ і B $(0; -4)$ відносно осей координат.

18.20.° Точки A $(x; 3)$ і B $(-2; y)$ симетричні відносно:
1) осі абсцис;
2) осі ординат.
Знайдіть x і y.

18.21.• Образом прямої a при симетрії відносно прямої l є сама пряма a. Яке взаємне розміщення прямих a і l?

18.22.• Доведіть, що трикутник, який має вісь симетрії, є рівнобедреним.

18.23.• Доведіть, що трикутник, який має дві осі симетрії, є рівностороннім. Чи може трикутник мати рівно дві осі симетрії?

18.24.• Доведіть, що коли паралелограм має рівно дві осі симетрії, то він є або прямокутником, або ромбом.

18.25.• Доведіть, що коли чотирикутник має чотири осі симетрії, то він є квадратом.

18.26.• Кола із центрами O_1 і O_2 перетинаються в точках A і B. Доведіть, що точки A і B симетричні відносно прямої O_1O_2.

18.27.• Точка M належить прямому куту ABC (рис. 18.21). Точки M_1 і M_2 — образи точки M при симетрії відносно прямих BA і BC відповідно. Доведіть, що точки M_1, B і M_2 лежать на одній прямій.

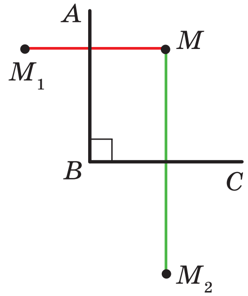


Рис. 18.21

18.28.• Знайдіть координати точок, симетричних точкам A $(-2; 0)$ і B $(3; -1)$ відносно прямої, яка містить бісектриси: 1) першого та третього координатних кутів; 2) другого та четвертого координатних кутів.

18.29.• Точки A $(x; -1)$ і B $(y; 2)$ симетричні відносно прямої, яка містить бісектриси першого та третього координатних кутів. Знайдіть x і y.

18.30.•• Точки A і B лежать у різних півплощинах відносно прямої a. На прямій a знайдіть таку точку X, щоби пряма a містила бісектрису кута AXB.

18.31.•• Точки A і B лежать в одній півплощині відносно прямої a. Знайдіть на прямій a таку точку X, щоби промені XA і XB утворювали із цією прямою рівні кути.

18.32.•• Точки A і B лежать в одній півплощині відносно прямої a. Знайдіть на прямій a таку точку X, щоб сума $AX + XB$ була найменшою.

18.33.* Побудуйте трикутник ABC за двома сторонами AB і AC ($AB < AC$) і різницею кутів B і C.

18.34.* Точки C і D лежать в одній півплощині відносно прямої AB (рис. 18.22). На прямій AB знайдіть таку точку X, що $\angle AXC = \frac{1}{2}\angle DXB$.

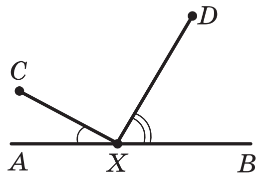


Рис. 18.22

18.35.* Доведіть, що площа опуклого чотирикутника $ABCD$ не перевищує $\frac{1}{2}(AB \cdot CD + BC \cdot AD)$.

18.36.* Дано трикутник ABC. Знайдіть точку, симетричний образ якої відносно будь-якої сторони трикутника лежить на колі, описаному навколо цього трикутника.

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

18.37. Периметр паралелограма $ABCD$ дорівнює 48 см, $AD = 7$ см. Яку сторону паралелограма перетинає бісектриса кута B? Знайдіть відрізки, на які бісектриса ділить сторону паралелограма.

18.38. Два трикутники мають по дві рівні сторони, а сума кутів між відповідно рівними сторонами цих трикутників дорівнює $180°$. Доведіть, що дані трикутники рівновеликі.

18.39. Дано точки A (5; 2), B (−7; 1) і C (1; −5), відрізок AM — медіана трикутника ABC. Складіть рівняння прямої AM.

ПЕРША ВСЕУКРАЇНСЬКА ОЛІМПІАДА ЮНИХ МАТЕМАТИКІВ

Сподіваємося, що задача 18.36 вам сподобалася і ви відчули радість успіху, розв'язавши її. Ця задача варта уваги ще й тому, що в 1961 р. її було запропоновано учасникам першої Всеукраїнської олімпіади юних математиків.

Узагалі, математичні олімпіади в Україні мають давню традицію. Перша міська олімпіада юних математиків відбулася в 1935 р.

у Києві. Відтоді минуло понад 80 років, і за цей час математичні олімпіади стали для багатьох талановитих школярів першим кроком на шляху до наукової творчості. Сьогодні такі імена, як О. В. Погорєлов, С. Г. Крейн, М. О. Красносельський, В. Г. Дрінфельд, відомі всьому науковому світові. Усі вони в різні роки були переможцями математичних олімпіад в Україні.

Хочемо із задоволенням зазначити, що й зараз математичні олімпіади в Україні дуже популярні. Десятки тисяч школярів нашої країни на різних етапах беруть участь у цьому математичному змаганні. До організації та проведення олімпіад залучають найкращих учених, методистів, учителів. Саме завдяки їхньому ентузіазму та професіоналізму команда України гідно представляє нашу країну на міжнародних математичних олімпіадах.

Радимо й вам, любі діти, брати участь у математичних олімпіадах. Нижче ми наводимо деякі задачі першої Всеукраїнської олімпіади юних математиків. Випробуйте свої сили.

1. Коло, вписане в трикутник ABC, дотикається до його сторін у точках K, L, M. Нехай точки O_1, O_2, O_3 є центрами кіл, зовнівписаних у цей самий трикутник. Довести, що трикутники KLM і $O_1O_2O_3$ подібні.

2. Усередині прямокутника, площа якого 4 м², розміщено 7 прямокутників, причому площа кожного з них дорівнює 1 м². Довести, що принаймні два прямокутники мають спільну частину, площа якої не менша ніж $\frac{1}{7}$ м².

3. Нехай сторони чотирикутника відповідно дорівнюють a, b, c, d, а його площа дорівнює S. Довести, що $S \leqslant \frac{1}{4}(a+c)(b+d)$.

Олексій Васильович Погорєлов
(1919–2002)

Селім Григорович Крейн
(1917–1999)

Марк Олександрович Красносельський
(1920–1997)

Володимир Гершонович Дрінфельд
(1954 р. н.)

19. Центральна симетрія. Поворот

Означення. **Точки A і A_1 називають симетричними відносно точки O, якщо точка O є серединою відрізка AA_1** (рис. 19.1). **Точку O вважають симетричною самій собі.**

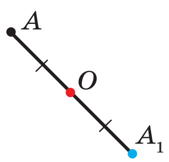


Рис. 19.1

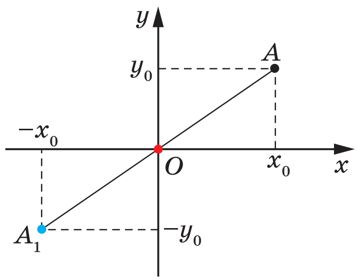


Рис. 19.2

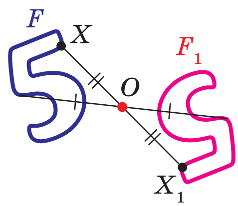


Рис. 19.3

Наприклад, точки A і A_1, у яких як абсциси, так і ординати — протилежні числа, симетричні відносно початку координат (рис. 19.2).

Розглянемо фігуру F і точку O. Кожній точці X фігури F поставимо у відповідність симетричну їй відносно точки O точку X_1. Унаслідок такого перетворення фігури F отримаємо фігуру F_1 (рис. 19.3). Таке перетворення фігури F називають **центральною симетрією відносно точки** O. Точку O називають **центром симетрії**. Також говорять, що фігури F і F_1 **симетричні відносно точки** O.

Теорема 19.1 (властивість центральної симетрії). ***Центральна симетрія є рухом.***

Доведення. ⊙ Виберемо систему координат так, щоб центр симетрії збігався з початком координат. Нехай $A\ (x_1;\ y_1)$ і $B\ (x_2;\ y_2)$ — довільні точки фігури F. Точки $A_1\ (-x_1;\ -y_1)$ і $B_1\ (-x_2;\ -y_2)$ — відповідно їхні образи при центральній симетрії відносно початку координат. Маємо:

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2},$$

$$A_1B_1 = \sqrt{(-x_2 - (-x_1))^2 + (-y_2 - (-y_1))^2} = \sqrt{(-x_2 + x_1)^2 + (-y_2 + y_1)^2} = AB.$$

Ми отримали, що $AB = A_1B_1$, тобто центральна симетрія зберігає відстань між точками. Отже, центральна симетрія є рухом. ◄

Наслідок. ***Якщо фігури F і F_1 є симетричними відносно точки, то $F = F_1$.***

Означення. **Фігуру називають симетричною відносно точки O, якщо для кожної точки даної фігури точка, симетрична їй відносно точки O, також належить цій фігурі.**

Точку O називають **центром симетрії фігури.** Також говорять, що **фігура має центр симетрії.**

Рис. 19.4

Наведемо приклади фігур, які мають центр симетрії.

Центром симетрії відрізка є його середина (рис. 19.4).

Точка перетину діагоналей паралелограма є його центром симетрії (рис. 19.5).

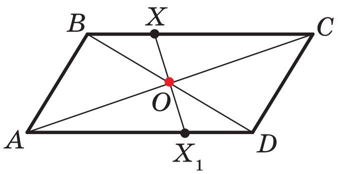


Рис. 19.5

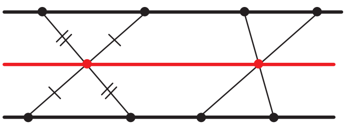


Рис. 19.6

Існують фігури, які мають безліч центрів симетрії. Наприклад, кожна точка прямої є її центром симетрії.

Також безліч центрів симетрії має фігура, яка складається з двох паралельних прямих. Будь-яка точка прямої, рівновіддаленої від двох даних, є центром симетрії розглядуваної фігури (рис. 19.6).

Задача 1. Доведіть, що образом даної прямої l при симетрії відносно точки O, яка не належить прямій l, є пряма, паралельна даній.

Розв'язання. Оскільки центральна симетрія — це рух, то образом прямої l буде пряма. Для побудови прямої достатньо знайти дві будь-які її точки.

Виберемо на прямій l довільні точки A і B (рис. 19.7). Нехай точки A_1 і B_1 — їхні образи при центральній симетрії відносно точки O. Тоді пряма A_1B_1 — образ прямої l.

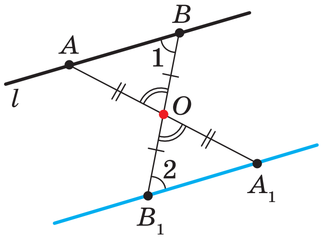


Рис. 19.7

Оскільки $AO = OA_1$, $BO = OB_1$, кути AOB і A_1OB_1 рівні як вертикальні, то трикутники AOB і A_1OB_1 рівні за першою ознакою рівності трикутників. Звідси $\angle 1 = \angle 2$ (рис. 19.7). Отже, за ознакою паралельних прямих $l \parallel A_1B_1$. ◄

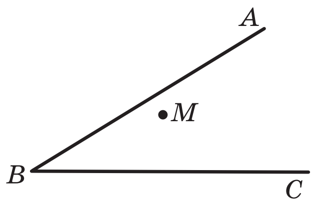


Рис. 19.8

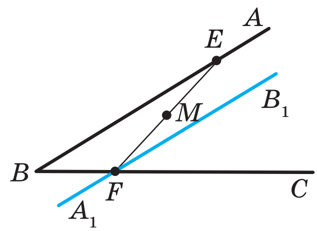


Рис. 19.9

Задача 2. Точка M належить куту ABC (рис. 19.8). На сторонах BA і BC кута побудуйте такі точки E і F, щоб точка M була серединою відрізка EF.

Розв'язання. Нехай пряма A_1B_1 — образ прямої AB при центральній симетрії відносно точки M (рис. 19.9). Позначимо буквою F точку перетину прямих A_1B_1 і BC.

Знайдемо прообраз точки F. Очевидно, що він лежить на прямій AB. Тому достатньо знайти точку перетину прямих FM і AB. Позначимо цю точку буквою E. Тоді E і F — шукані точки. ◀

Вивчаючи навколишній світ, ми часто бачимо приклади прояву симетрії в природі (рис. 19.10). Об'єкти, які мають вісь або центр симетрії, легко сприймаються та приємні для очей. Недарма в Стародавній Греції слово «симетрія» слугувало синонімом слів «гармонія», «краса».

Рис. 19.10

Ідея симетрії широко використовується в образотворчому мистецтві, архітектурі й техніці (рис. 19.11).

Рис. 19.11

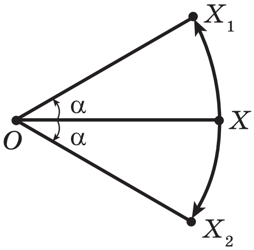


Рис. 19.12

На рисунку 19.12 зображено точки O, X, X_1 і X_2 такі, що $OX_1 = OX_2 = OX$, $\angle X_1OX = \angle X_2OX = \alpha$. Говорять, що точка X_1 є образом точки X при **повороті навколо центра O проти годинникової стрілки на кут** α. Також говорять, що точка X_2 — це образ точки X при **повороті навколо центра O за годинниковою стрілкою на кут** α.

Точку O називають **центром повороту**, кут α — **кутом повороту**.

Розглянемо фігуру F, точку O та кут α. Кожній точці X фігури F поставимо у відповідність точку X_1, яка є образом точки X при повороті навколо центра O проти годинникової стрілки на кут α (якщо точка O належить фігурі F, то їй зіставляється вона сама). Унаслідок такого перетворення фігури F отримаємо фігуру F_1 (рис. 19.13). Таке перетворення фігури F називають **поворотом навколо центра O проти годинникової стрілки на кут** α. Точку O називають **центром повороту**.

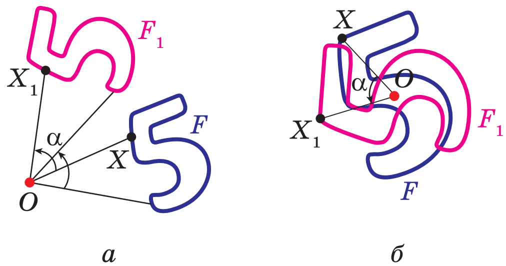


Рис. 19.13

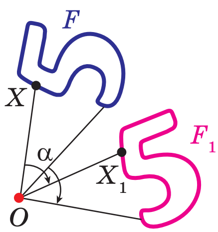


Рис. 19.14

Аналогічно означають перетворення повороту фігури F за годинниковою стрілкою на кут α (рис. 19.14).

Зауважимо, що центральна симетрія є поворотом навколо центра симетрії на кут $180°$.

Теорема 19.2 (властивість повороту). ***Поворот є рухом.***

Доведіть цю теорему самостійно.

Наслідок. ***Якщо фігура F_1 — образ фігури F при повороті, то $F = F_1$.***

Задача 3. Дано пряму a і точку O поза нею. Побудуйте образ прямої a при повороті навколо точки O проти годинникової стрілки на кут $45°$.

Розв'язання. Оскільки поворот — це рух, то образом прямої a буде пряма. Для побудови прямої достатньо знайти дві будь-які її точки. Виберемо на прямій a довільні точки A і B (рис. 19.15). Побудуємо точки A_1 і B_1 — їхні образи при повороті навколо точки O проти годинникової стрілки на кут 45°. Тоді пряма A_1B_1 — образ прямої a. ◀

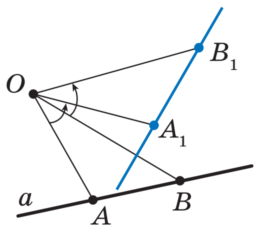


Рис. 19.15

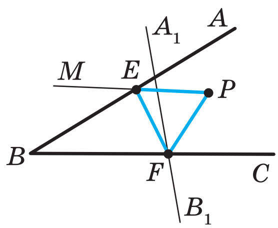


Рис. 19.16

Задача 4. Точка P належить куту ABC, але не належить його сторонам. Побудуйте рівносторонній трикутник, одна вершина якого є точкою P, а дві інші належать сторонам BA і BC кута ABC.

Розв'язання. Нехай пряма A_1B_1 — образ прямої AB при повороті навколо центра P проти годинникової стрілки на кут 60° (рис. 19.16). Позначимо буквою F точку перетину прямих A_1B_1 і BC.

Нехай точка E — прообраз точки F при розглядуваному повороті. Точка E належить стороні BA кута ABC.

Ці міркування підказують, як побудувати шуканий трикутник.

Будуємо пряму A_1B_1 як образ прямої AB при повороті навколо центра P проти годинникової стрілки на кут 60°. Нехай F — точка перетину прямих A_1B_1 і BC.

Будуємо кут MPF, що дорівнює 60°. Нехай прямі MP і AB перетинаються в точці E. Ця точка і є прообразом точки F.

Маємо: $PF = PE$ і $\angle FPE = 60°$. Отже, трикутник EPF рівносторонній. ◀

1. Які точки називають симетричними відносно точки O? Як називають точку O?
2. Які фігури називають симетричними відносно точки O?
3. Сформулюйте властивість центральної симетрії.
4. Яку властивість мають фігури, симетричні відносно точки?
5. Про яку фігуру говорять, що вона має центр симетрії?

6. Наведіть приклади фігур, які мають центр симетрії.
7. Опишіть перетворення повороту навколо точки.
8. Сформулюйте властивість повороту.
9. Яку властивість мають фігури, якщо одна з них є образом другої при повороті?

ПРАКТИЧНІ ЗАВДАННЯ

19.1.° Накресліть трикутник ABC і позначте точку O, яка не належить йому. Побудуйте трикутник, симетричний даному відносно точки O.

19.2.° Накресліть трикутник ABC. Побудуйте трикутник, симетричний даному відносно середини сторони AB.

19.3.° Накресліть коло й позначте на ньому точку. Побудуйте коло, симетричне даному відносно позначеної точки.

19.4.° Побудуйте образ відрізка AB при повороті навколо центра O проти годинникової стрілки на кут $45°$ (рис. 19.17).

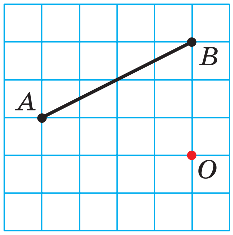


Рис. 19.17

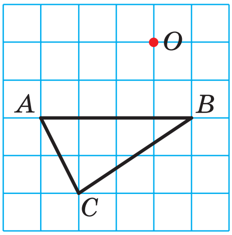


Рис. 19.18

19.5.° Побудуйте образ трикутника ABC при повороті навколо центра O за годинниковою стрілкою на кут $90°$ (рис. 19.18).

19.6.• Побудуйте паралелограм $ABCD$ за його вершинами A і B та точкою O перетину його діагоналей (рис. 19.19).

19.7.• Дано дві паралельні прямі a і b (рис. 19.20). Знайдіть точку, відносно якої пряма a буде симетричною прямій b.

19.8.• На рисунку 19.21 зображено два рівних відрізки AB і BC, причому $\angle ABC = 60°$. Знайдіть точку O таку, щоб відрізок AB був образом відрізка BC при повороті навколо точки O проти годинникової стрілки на кут $120°$.

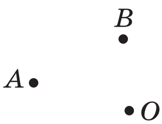


Рис. 19.19

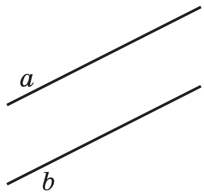


Рис. 19.20

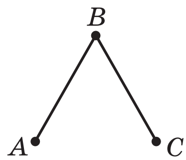


Рис. 19.21

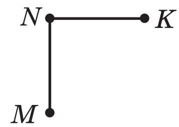


Рис. 19.22

19.9.• На рисунку 19.22 зображено два рівних перпендикулярних відрізки MN і NK. Знайдіть точку O таку, щоб відрізок NK був образом відрізка MN при повороті навколо точки O за годинниковою стрілкою на кут $90°$.

19.10.* Побудуйте фігуру, яка не має осей симетрії та образом якої є ця сама фігура при повороті навколо деякої точки:
1) на кут $90°$; 2) на кут $120°$.

ВПРАВИ

19.11.° Діагоналі паралелограма $ABCD$ перетинаються в точці O (рис. 19.23). Точка M — середина сторони BC. Укажіть образи точок A, D і M, сторони CD, діагоналі BD при симетрії відносно точки O.

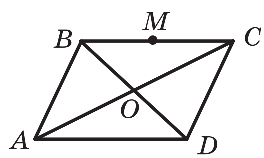


Рис. 19.23

19.12.° Доведіть, що точка перетину діагоналей паралелограма є його центром симетрії.

19.13.° Доведіть, що коло має центр симетрії.

19.14.° Точки A_1 і B_1 є образами відповідно точок A і B при симетрії відносно точки, яка не належить прямій AB. Доведіть, що чотирикутник ABA_1B_1 — паралелограм.

19.15.° Знайдіть координати точок, симетричних точкам $A\ (3; -1)$ і $B\ (0; -2)$ відносно:
1) початку координат; 2) точки $M\ (2; -3)$.

19.16.° Доведіть, що образом прямої, яка проходить через центр симетрії, є ця сама пряма.

19.17.° Точки $A\ (x; -2)$ і $B\ (1; y)$ симетричні відносно:
1) початку координат; 2) точки $M\ (-1; 3)$.
Знайдіть x і y.

19.18.° На рисунку 19.24 зображено фігури, які складено з рівних півкругів. Які із цих фігур при певному повороті навколо точки O на кут α, де $0° < \alpha \leqslant 180°$, збігаються зі своїми образами?

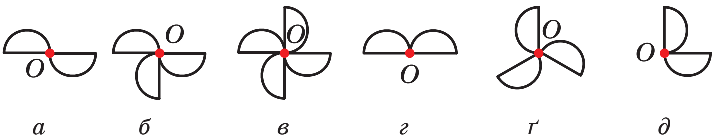


Рис. 19.24

19.19.° Медіани рівностороннього трикутника ABC перетинаються в точці O (рис. 19.25). Укажіть образи точок C, C_1 і O, сторони BC, медіани BB_1, відрізка OC_1, трикутника $A_1B_1C_1$ при повороті навколо точки O проти годинникової стрілки на кут 120°.

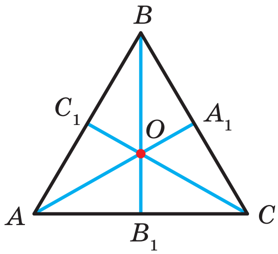


Рис. 19.25

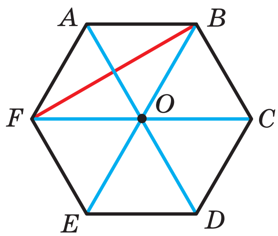


Рис. 19.26

19.20.° Точка O — центр правильного шестикутника $ABCDEF$ (рис. 19.26). Укажіть образи сторони AF, діагоналі BF, діагоналі AD, шестикутника $ABCDEF$ при повороті навколо точки O за годинниковою стрілкою на кут:

1) 60°; 2) 120°.

19.21.° Діагоналі квадрата $ABCD$ перетинаються в точці O (рис. 19.27). Укажіть образи точок A, O і C, сторони AD, діагоналі BD при повороті навколо точки O за годинниковою стрілкою на кут 90°.

19.22.• Доведіть, що трикутник не має центра симетрії.

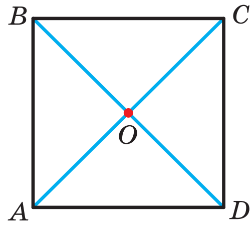


Рис. 19.27

19.23.° Доведіть, що промінь не має центра симетрії.

19.24.° Доведіть, що коли чотирикутник має центр симетрії, то він є паралелограмом.

19.25.° Кола із центрами O_1 і O_2 симетричні відносно точки O (рис. 19.28). Пряма, яка проходить через центр симетрії, перетинає перше коло в точках A_1 і B_1, а друге — у точках A_2 і B_2. Доведіть, що $A_1B_1 = A_2B_2$.

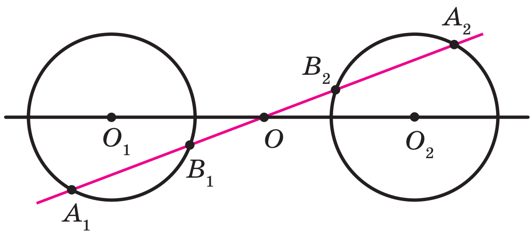


Рис. 19.28

19.26.° Вершина A рівностороннього трикутника ABC є центром повороту на кут $120°$. Знайдіть відрізок BC_1, де точка C_1 — образ точки C при заданому повороті, якщо $AB = 1$ см. Скільки розв'язків має задача?

19.27.° Вершина A квадрата $ABCD$ є центром повороту проти годинникової стрілки на кут $90°$. Знайдіть відрізок CC_1, де точка C_1 — образ точки C при заданому повороті, якщо $AB = 1$ см.

19.28.•• Вершини одного паралелограма лежать на сторонах другого: по одній вершині на кожній стороні. Доведіть, що точки перетину діагоналей цих паралелограмів збігаються.

19.29.•• Точки A і C належать гострому куту, але не лежать на його сторонах. Побудуйте паралелограм $ABCD$ так, щоб точки B і D лежали на сторонах кута.

19.30.•• Побудуйте відрізок, серединою якого є дана точка, а кінці належать даним непаралельним прямим.

19.31.•• Точка M належить куту ABC і не належить його сторонам. Побудуйте рівнобедрений прямокутний трикутник, вершина прямого кута якого є точкою M, а дві інші належать сторонам BA і BC відповідно.

19.32.* На стороні BC рівностороннього трикутника ABC позначили точку D. Поза трикутником ABC позначили точку E таку, що трикутник DEC рівносторонній (рис. 19.29). Доведіть, що точка C і середини M і K відрізків BE і AD відповідно є вершинами рівностороннього трикутника.

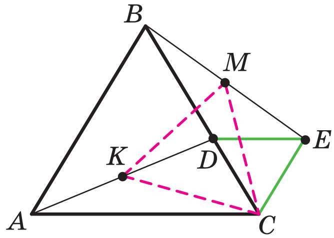


Рис. 19.29

19.33.* Побудуйте рівносторонній трикутник так, щоб його вершини належали трьом даним паралельним прямим.

19.34.* Побудуйте ромб, точкою перетину діагоналей якого є дана точка, а три вершини належать трьом даним попарно непаралельним прямим.

19.35.* На стороні CD квадрата $ABCD$ позначено точку E. Бісектриса кута BAE перетинає сторону BC у точці F. Доведіть, що $AE = BF + ED$.

19.36.* У рівносторонньому трикутнику ABC вибрано точку P так, що $\angle APB = 150°$. Доведіть, що існує прямокутний трикутник, сторони якого дорівнюють відрізкам PA, PB і PC.

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

19.37. Знайдіть сторони трикутника ABC, якщо $\angle A = 30°$, $\angle B = 45°$, а висота, проведена з вершини C, дорівнює 4 см.

19.38. На осі абсцис знайдіть точку, рівновіддалену від точок $A\ (-2;\ 4)$ і $B\ (6;\ 8)$.

19.39. У рівнобедрений трикутник вписано коло. Точка дотику ділить бічну сторону трикутника у відношенні 25 : 12, рахуючи від вершини рівнобедреного трикутника. Знайдіть радіус вписаного кола, якщо площа трикутника дорівнює 1680 см^2.

СПОСТЕРІГАЙТЕ, РИСУЙТЕ, КОНСТРУЮЙТЕ, ФАНТАЗУЙТЕ

19.40. Позначте на площині 6 точок так, щоби будь-які три з них були вершинами рівнобедреного трикутника.

20. Подібність фігур[1]

На рисунку 20.1 зображено точки O, X і X_1 такі, що $\overrightarrow{OX_1} = 2\overrightarrow{OX}$. Говорять, що точка X_1 — це образ точки X при **гомотетії із центром** O та **коефіцієнтом** 2.

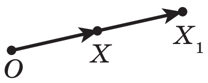


Рис. 20.1

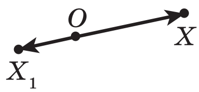


Рис. 20.2

На рисунку 20.2 зображено точки O, X і X_1 такі, що $\overrightarrow{OX_1} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{OX}$. Говорять, що точка X_1 — це образ точки X при гомотетії із центром O та коефіцієнтом $-\frac{1}{2}$.

Узагалі, якщо точки O, X і X_1 є такими, що $\overrightarrow{OX_1} = k\overrightarrow{OX}$, де $k \neq 0$, то говорять, що точка X_1 — це образ точки X при **гомотетії із центром O та коефіцієнтом k**.

Точку O називають **центром гомотетії**, число k — **коефіцієнтом гомотетії**, $k \neq 0$.

Розглянемо фігуру F і точку O. Кожній точці X фігури F поставимо у відповідність точку X_1, яка є образом точки X при гомотетії із центром O та коефіцієнтом k (якщо точка O належить фігурі F, то їй зіставляється вона сама). У результаті цього перетворення фігури F отримаємо фігуру F_1 (рис. 20.3). Таке перетворення фігури F називають **гомотетією із центром O та коефіцієнтом k**. Також говорять, що фігура F_1 **гомотетична** фігурі F із центром O та коефіцієнтом k.

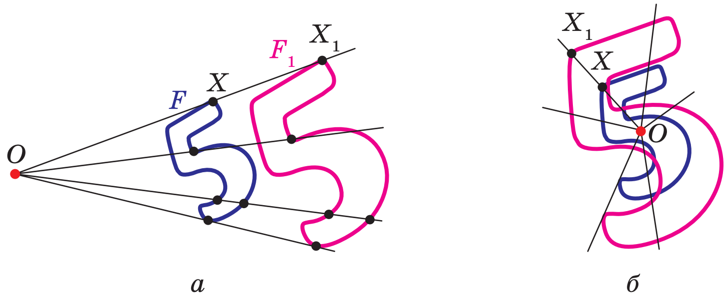


Рис. 20.3

[1] Матеріал пункту, який відноситься до гомотетії, є необов'язковим для вивчення.

Наприклад, на рисунку 20.4 трикутник $A_1B_1C_1$ гомотетичний трикутнику ABC із центром O та коефіцієнтом, який дорівнює -3. Також можна сказати, що трикутник ABC гомотетичний трикутнику $A_1B_1C_1$ із тим самим центром, але коефіцієнтом гомотетії, який дорівнює $-\frac{1}{3}$.

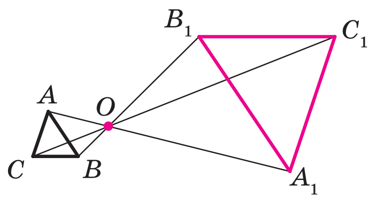


Рис. 20.4

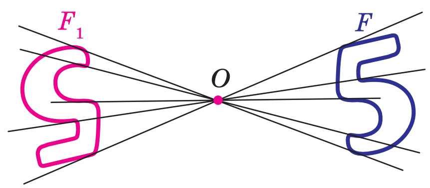


Рис. 20.5

Зазначимо, що при $k = -1$ гомотетія із центром O є центральною симетрією із центром O (рис. 20.5). Якщо $k = 1$, то гомотетія є тотожним перетворенням.

Очевидно, що при $k \neq 1$ і $k \neq -1$ гомотетія не є рухом.

Теорема 20.1. ***При гомотетії фігури F із коефіцієнтом k усі відстані між її точками змінюються в | k | разів, тобто якщо A і B — довільні точки фігури F, а точки A_1 і B_1 — їхні відповідні образи при гомотетії з коефіцієнтом k, то $A_1B_1 = |k|\,AB$.***

Доведення. Нехай точка O — центр гомотетії. Тоді $\overrightarrow{OA_1} = k\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB_1} = k\overrightarrow{OB}$. Маємо:

$$\overrightarrow{A_1B_1} = \overrightarrow{OB_1} - \overrightarrow{OA_1} = k\overrightarrow{OB} - k\overrightarrow{OA} = k\left(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}\right) = k\overrightarrow{AB},$$

тобто $A_1B_1 = |k|\,AB$. ◀

Наслідок. ***Якщо трикутник $A_1B_1C_1$ гомотетичний трикутнику ABC із коефіцієнтом гомотетії k, то $\triangle A_1B_1C_1 \overset{k}{\sim} \triangle ABC$.***

Для доведення цього твердження достатньо скористатися теоремою 20.1 і третьою ознакою подібності трикутників.

Гомотетія має низку інших властивостей.

При гомотетії:

- *образом прямої є пряма;*
- *образом відрізка є відрізок;*
- *образом кута є кут, який дорівнює даному;*
- *образом трикутника є трикутник, подібний даному;*
- *образом кола є коло;*

- *площа многокутника змінюється в k^2 разів, де k — коефіцієнт гомотетії.*

Ці властивості ви можете довести на заняттях математичного гуртка.

Зазначені властивості гомотетії вказують на те, що це перетворення може змінити розміри фігури, але не змінює її форму, тобто при гомотетії образ і прообраз є подібними фігурами. Зауважимо, що в курсі геометрії 8 класу, коли йшлося про подібність фігур, ми давали означення лише подібним трикутникам. Зараз означимо поняття подібності для довільних фігур.

На рисунку 20.6 фігура F_1 гомотетична фігурі F, а фігура F_2 симетрична фігурі F_1 відносно прямої l.

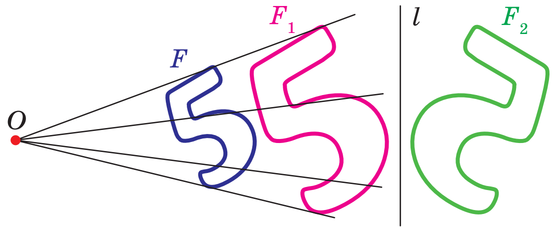


Рис. 20.6

Говорять, що фігуру F_2 отримано з фігури F у результаті **композиції** двох перетворень: гомотетії та осьової симетрії.

Оскільки $F_1 = F_2$, то фігури F і F_2 мають однакові форми, але різні розміри, тобто вони є подібними. Говорять, що фігуру F_2 отримано з фігури F у результаті **перетворення подібності**.

На рисунку 20.7 фігура F_1 гомотетична фігурі F, а фігура F_2 — образ фігури F_1 при деякому русі. Тут також можна стверджувати, що фігури F і F_2 подібні.

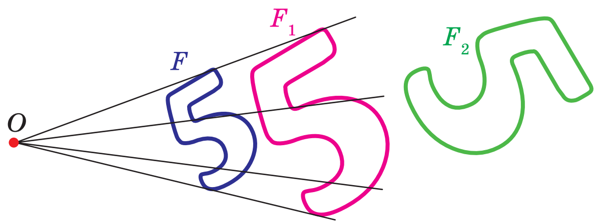


Рис. 20.7

Зі сказаного випливає, що доцільно прийняти таке означення.

Означення. Дві фігури називають подібними, якщо одну з них можна отримати з другої в результаті композиції двох перетворень: гомотетії та руху.

Це означення ілюструє схема, зображена на рисунку 20.8.

Подібність = Гомотетія + Рух

Рис. 20.8

Запис $F \sim F_1$ означає, що фігури F і F_1 подібні. Також говорять, що фігура F_1 — образ фігури F при **перетворенні подібності**.

Із наведеного означення випливає, що *при перетворенні подібності фігури F відстані між її точками змінюються в одну й ту саму кількість разів*.

Оскільки тотожне перетворення є рухом, то зі схеми, зображеної на рисунку 20.8, випливає, що гомотетія — окремий випадок перетворення подібності.

Нехай A і B — довільні точки фігури F, а точки A_1 і B_1 — їхні образи при перетворенні подібності. Точки A_1 і B_1 належать фігурі F_1, яка подібна фігурі F. Число $k = \frac{A_1B_1}{AB}$ називають **коефіцієнтом подібності**. Говорять, що фігура F_1 подібна фігурі F із коефіцієнтом подібності k, а фігура F подібна фігурі F_1 із коефіцієнтом подібності $\frac{1}{k}$.

Зауважимо, що перетворення подібності з коефіцієнтом $k = 1$ є рухом. Звідси випливає, що рух — окремий випадок перетворення подібності.

З перетворенням подібності ми часто маємо справу в повсякденному житті (рис. 20.9). Наприклад, унаслідок зміни масштабу карти отримуємо карту, подібну даній. Фотографія — це перетворення негатива в подібне зображення на фотопапері. Переносячи до свого зошита рисунок, зроблений учителем на дошці, ви також виконуєте перетворення подібності.

Рис. 20.9

Теорема 20.2. ***Відношення площ подібних многокутників дорівнює квадрату коефіцієнта подібності.***

Доведення цієї теореми виходить за межі розглядуваного курсу геометрії. Ми доведемо її для окремого випадку, розглянувши подібні трикутники.

Доведення. Нехай трикутник $A_1B_1C_1$ — образ трикутника ABC при перетворенні подібності з коефіцієнтом k (рис. 20.10). Сторона A_1C_1 — образ сторони AC. Тоді $A_1C_1 = k \cdot AC$. Проведемо висоту BD. Нехай точка D_1 — образ точки D. Оскільки при перетворенні подібності зберігаються кути, то відрізок B_1D_1 — висота трикутника $A_1B_1C_1$. Тоді $B_1D_1 = k \cdot BD$. Маємо:

$$\frac{S_{A_1B_1C_1}}{S_{ABC}} = \frac{\frac{1}{2}A_1C_1 \cdot B_1D_1}{\frac{1}{2}AC \cdot BD} = \frac{k \cdot AC \cdot k \cdot BD}{AC \cdot BD} = k^2. \blacktriangleleft$$

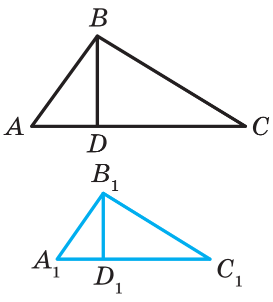


Рис. 20.10

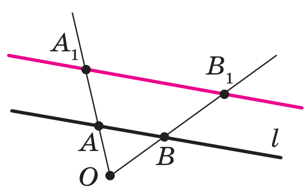


Рис. 20.11

Задача 1. Доведіть, що образом прямої l при гомотетії із центром O, який не належить прямій l, є пряма, паралельна даній.

Розв'язання. Із властивостей гомотетії випливає, що образом прямої l буде пряма. Для побудови прямої достатньо знайти дві будь-які її точки. Виберемо на прямій l довільні точки A і B (рис. 20.11). Нехай точки A_1 і B_1 — їхні образи при гомотетії із центром O та коефіцієнтом k (рисунок 20.11 відповідає випадку, коли $k > 1$). Тоді пряма A_1B_1 — образ прямої AB.

При доведенні теореми 20.1 ми показали, що $\overrightarrow{A_1B_1} = k\overrightarrow{AB}$. Отже, $AB \parallel A_1B_1$. $\blacktriangleleft$

Задача 2. У гострокутний трикутник ABC впишіть квадрат так, щоб дві його вершини лежали відповідно на сторонах AB і BC, а дві інші — на стороні AC.

Розв'язання. Із довільної точки M сторони AB опустимо перпендикуляр MQ на сторону AC (рис. 20.12). Побудуємо квадрат $MQPN$ так, щоб точка P лежала на промені QC. Нехай промінь AN перетинає сторону BC у точці N_1.

Розглянемо гомотетію із центром A та коефіцієнтом $k = \frac{AN_1}{AN}$. Тоді точка N_1 — образ точки N при цій гомотетії. Образом відрізка MN є відрізок M_1N_1, де точка M_1 належить променю AB, причому $M_1N_1 \parallel MN$. Аналогічно відрізок N_1P_1 такий, що точка P_1 належить променю AC і $N_1P_1 \parallel NP$, є образом відрізка NP. Отже, відрізки M_1N_1 і N_1P_1 — сусідні сторони шуканого квадрата. Для завершення побудови залишилося опустити перпендикуляр M_1Q_1 на сторону AC. ◀

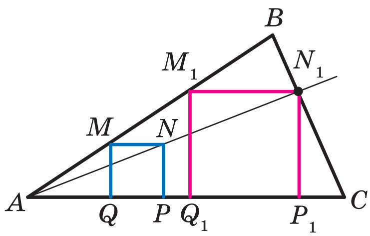


Рис. 20.12

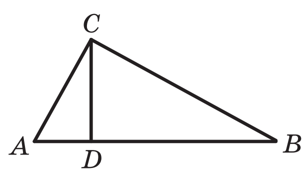


Рис. 20.13

Задача 3. Відрізок CD — висота прямокутного трикутника ABC ($\angle C = 90°$). Знайдіть радіус r вписаного кола трикутника ABC, якщо радіуси кіл, вписаних у трикутники ACD і BCD, відповідно дорівнюють r_1 і r_2.

Розв'язання. Оскільки кут A — спільний для прямокутних трикутників ACD і ABC, то ці трикутники подібні (рис. 20.13). Нехай коефіцієнт подібності дорівнює k_1. Очевидно, що $k_1 = \frac{r_1}{r}$.

Аналогічно $\Delta BCD \sim \Delta ABC$ із коефіцієнтом подібності $k_2 = \frac{r_2}{r}$.

Позначимо площі трикутників ACD, BCD і ABC відповідно S_1, S_2 і S. Маємо:

$$\frac{S_1}{S} = k_1^2 = \frac{r_1^2}{r^2}; \quad \frac{S_2}{S} = k_2^2 = \frac{r_2^2}{r^2}.$$

Звідси $\dfrac{r_1^2 + r_2^2}{r^2} = \dfrac{S_1 + S_2}{S} = 1$.

Отримуємо, що $r^2 = r_1^2 + r_2^2$, тобто $r = \sqrt{r_1^2 + r_2^2}$.

Відповідь: $\sqrt{r_1^2 + r_2^2}$. ◀

1. У якому разі говорять, що точка X_1 є образом точки X при гомотетії із центром O та коефіцієнтом k?
2. Опишіть перетворення фігури F, яке називають гомотетією із центром O та коефіцієнтом k.
3. Як змінюється відстань між точками при гомотетії з коефіцієнтом k?
4. Сформулюйте властивості гомотетії.
5. Які фігури називають подібними?
6. Чому дорівнює відношення площ подібних многокутників?

ПРАКТИЧНІ ЗАВДАННЯ

20.1.° Побудуйте образ відрізка AB (рис. 20.14) при гомотетії із центром O та коефіцієнтом:

1) $k = 2$; 2) $k = -\dfrac{1}{2}$.

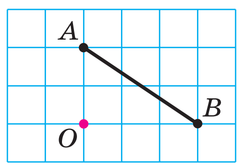


Рис. 20.14

20.2.° Накресліть відрізок AB. Побудуйте образ цього відрізка при гомотетії з коефіцієнтом k і центром:

1) у точці A, $k = 3$;
2) у точці B, $k = -2$;
3) у середині відрізка AB, $k = 2$.

20.3.° Накресліть коло, радіус якого дорівнює 2 см, і позначте на ньому точку A. Побудуйте образ цього кола при гомотетії з коефіцієнтом k і центром:

1) у центрі кола, $k = -\dfrac{1}{2}$, $k = 2$;

2) у точці A, $k = 2$, $k = -\dfrac{1}{2}$.

20.4.° Накресліть трикутник ABC. Побудуйте образ цього трикутника при гомотетії з коефіцієнтом k і центром:

1) у точці B, $k = 3$;
2) у точці C, $k = -\frac{1}{2}$;
3) у точці A, $k = \frac{1}{2}$;
4) у середині сторони AB, $k = \frac{1}{2}$;
5) у середині сторони AC, $k = -\frac{1}{3}$.

20.5.° Накресліть трикутник ABC. Знайдіть точку перетину його медіан. Побудуйте образ цього трикутника при гомотетії із центром у точці перетину його медіан і коефіцієнтом:

1) $k = 2$; 2) $k = \frac{1}{2}$; 3) $k = -\frac{1}{2}$.

20.6.° Накресліть паралелограм $ABCD$. Точку перетину його діагоналей позначте буквою O. Побудуйте образ цього паралелограма при гомотетії із центром O та коефіцієнтом: 1) $k = 2$; 2) $k = -2$.

20.7.° Накресліть квадрат $ABCD$. Побудуйте образ цього квадрата при гомотетії з коефіцієнтом k і центром:

1) у точці A, $k = \frac{1}{3}$; 2) у точці B, $k = -2$; 3) у точці C, $k = 2$.

20.8.° Орієнтуючись за клітинками, накресліть п'ятикутник $ABCDE$ (рис. 20.15). Побудуйте п'ятикутник $A_1B_1C_1D_1E_1$, подібний даному з коефіцієнтом подібності $\frac{1}{2}$.

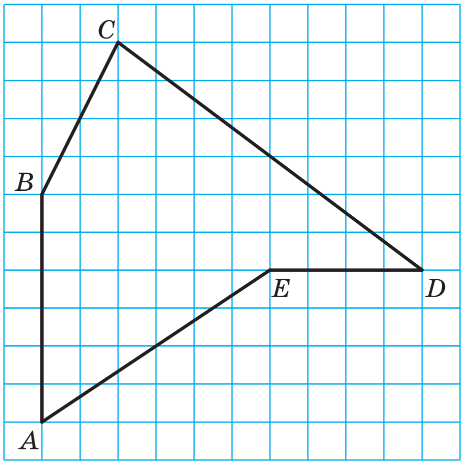


Рис. 20.15

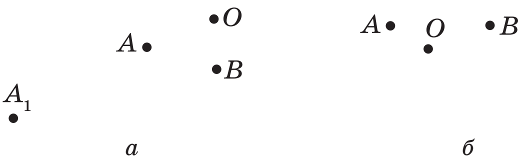


Рис. 20.16

Рис. 20.17

20.9.• На рисунку 20.16 точка A_1 — образ точки A при гомотетії із центром O. Побудуйте образ точки B при цій гомотетії.

20.10.• На рисунку 20.17 точка A_1 — образ точки A при гомотетії з коефіцієнтом: 1) $k = 3$; 2) $k = -2$. Побудуйте центр гомотетії.

20.11.• На рисунку 20.18 зображено прямокутник $ABCD$ та точки A_1 і D_1, які є образами відповідно точок A і D при перетворенні подібності. Побудуйте образ прямокутника $ABCD$ при цьому перетворенні. Скільки розв'язків має задача?

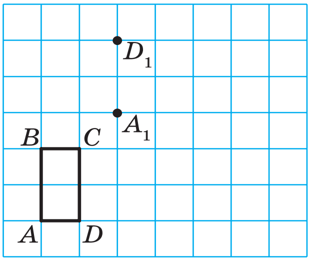


Рис. 20.18

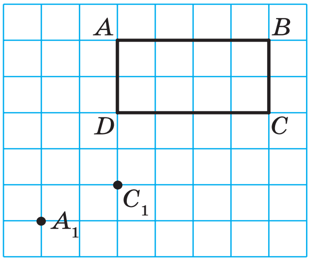


Рис. 20.19

20.12.• На рисунку 20.19 зображено прямокутник $ABCD$ та точки A_1 і C_1, які є образами відповідно точок A і C при перетворенні подібності. Побудуйте образ прямокутника $ABCD$ при цьому перетворенні. Скільки розв'язків має задача?

20.13.• Побудуйте образ трикутника ABC при перетворенні подібності, яке є композицією двох перетворень: гомотетії із центром O і коефіцієнтом $k = 2$ та осьової симетрії відносно прямої l (рис. 20.20). Укажіть коефіцієнт подібності.

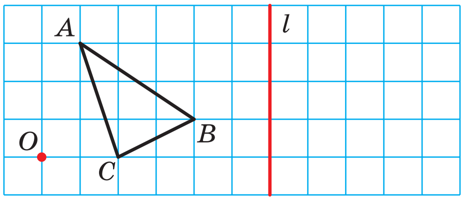


Рис. 20.20

20.14.• Накресліть коло, радіус якого дорівнює 2 см. Позначте точку O на відстані 4 см від його центра. Побудуйте образ цього кола при перетворенні подібності, яке є композицією двох перетворень: гомотетії із центром O та коефіцієнтом $k = \frac{1}{2}$ і повороту із центром O за годинниковою стрілкою на кут 45°. Укажіть коефіцієнт подібності.

20.15.• На рисунку 20.21 зображено дві паралельні прямі a і b. Побудуйте центр гомотетії, при якому пряма b є образом прямої a з коефіцієнтом: 1) $k = 2$; 2) $k = \frac{1}{2}$; 3) $k = -\frac{1}{2}$. Скільки розв'язків має задача?

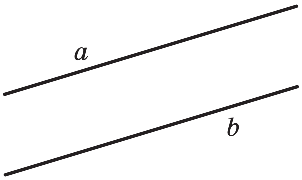


Рис. 20.21

20.16.• Накресліть трапецію $ABCD$, основа BC якої у два рази менша від основи AD. Побудуйте центр гомотетії, при якій відрізок AD є образом відрізка BC із коефіцієнтом: 1) $k = 2$; 2) $k = -2$.

ВПРАВИ

20.17.° У паралелограмі $ABCD$ точка D_1 — середина сторони AD. При гомотетії із центром A точка D_1 є образом точки D. Знайдіть коефіцієнт гомотетії. Укажіть, які точки є образами точок B і C при цій гомотетії.

20.18.° Які з фігур, зображених на рисунку 20.22, збігаються зі своїми образами при гомотетії із центром O та коефіцієнтом $k > 0$ і $k \neq 1$?

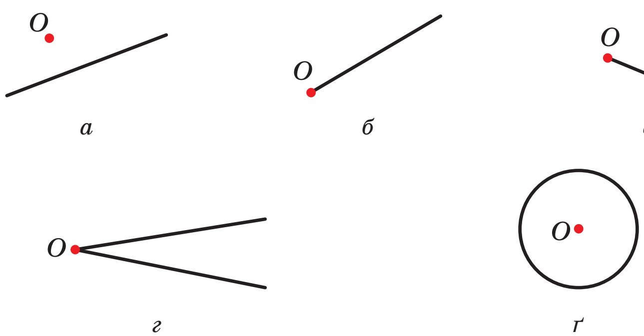


Рис. 20.22

20.19.° Які з фігур, зображених на рисунку 20.23, збігаються зі своїми образами при гомотетії із центром O та коефіцієнтом $k < 0$?

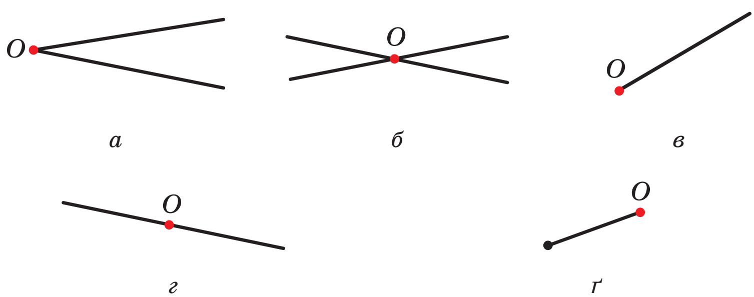


Рис. 20.23

20.20.° Медіани трикутника ABC перетинаються в точці M (рис. 20.24). Знайдіть коефіцієнт гомотетії із центром:

1) у точці B, при якій точка B_1 є образом точки M;
2) у точці M, при якій точка A_1 є образом точки A;
3) у точці C, при якій точка M є образом точки C_1.

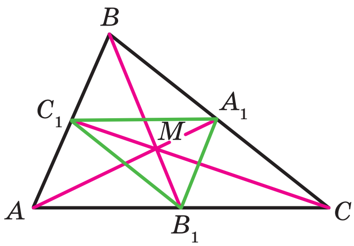


Рис. 20.24

20.21.° Медіани трикутника ABC перетинаються в точці M (рис. 20.24). Укажіть коефіцієнт і центр гомотетії, при якій трикутник $A_1B_1C_1$ є образом трикутника ABC.

20.22.° У трикутнику ABC медіани AA_1, BB_1 і CC_1 перетинаються в точці M. Точки K, F і N — середини відрізків AM, BM і CM відповідно. Укажіть коефіцієнт і центр гомотетії, при якій трикутник ABC є образом трикутника KFN.

20.23.° Знайдіть образи точок A $(-2; 1)$, B $(3; 0)$ і D $(0; -6)$ при гомотетії із центром O $(0; 0)$ та коефіцієнтом:

1) $k = 2$; 2) $k = 3$; 3) $k = -\frac{1}{2}$; 4) $k = -\frac{1}{3}$.

20.24.° Точка A_1 $(-1; 2)$ — образ точки A $(-3; 6)$ при гомотетії із центром у початку координат. Знайдіть коефіцієнт гомотетії.

20.25.° Площі двох подібних трикутників дорівнюють 28 см^2 і 63 см^2. Одна зі сторін першого трикутника дорівнює 8 см. Знайдіть сторону другого трикутника, яка відповідає даній стороні першого.

20.26.° Відповідні сторони двох подібних трикутників дорівнюють 30 см і 24 см. Площа трикутника зі стороною 30 см дорівнює 45 см^2. Знайдіть площу другого трикутника.

20.27.° Площа трикутника дорівнює S. Чому дорівнює площа трикутника, який відтинає від даного його середня лінія?

20.28.° Площа трикутника дорівнює S. Знайдіть площу трикутника, вершини якого — середини середніх ліній даного трикутника.

20.29.• Відрізок MN — середня лінія трикутника ABC (рис. 20.25). Укажіть коефіцієнт і центр гомотетії, при якій:
1) відрізок AC є образом відрізка MN;
2) відрізок MN є образом відрізка AC.

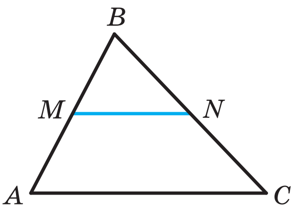


Рис. 20.25

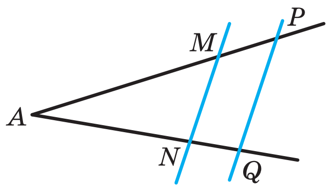


Рис. 20.26

20.30.• Паралельні прямі перетинають сторони кута A в точках M, N, P і Q (рис. 20.26). Відомо, що $AM : MP = 3 : 1$. Укажіть коефіцієнт і центр гомотетії, при якій:
1) відрізок PQ є образом відрізка MN;
2) відрізок MN є образом відрізка PQ.

20.31.• Паралельні відрізки BC і AD такі, що $AD = 3BC$. Скільки існує точок, що є центрами гомотетії, при якій образом відрізка BC є відрізок AD? Для кожної такої точки визначте коефіцієнт гомотетії.

20.32.• Кола із центрами O_1 і O_2 та радіусами R і r відповідно мають зовнішній дотик у точці O (рис. 20.27). Доведіть, що коло із центром O_1 є образом кола із центром O_2 при гомотетії із центром O та коефіцієнтом $-\frac{R}{r}$.

20.33.• Кола із центрами O_1 і O_2 та радіусами R і r відповідно мають внутрішній дотик у точці O (рис. 20.28). Доведіть, що коло із центром O_1 є образом кола із центром O_2 при гомотетії із центром O та коефіцієнтом $\frac{R}{r}$.

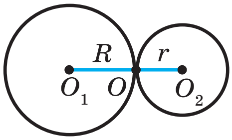


Рис. 20.27

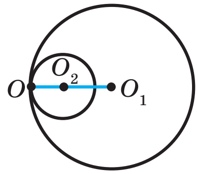


Рис. 20.28

20.34.• Коло із центром O дотикається до прямої a. Доведіть, що образ цього кола при гомотетії із центром A, де A — довільна точка прямої a (рис. 20.29), дотикається до цієї прямої.

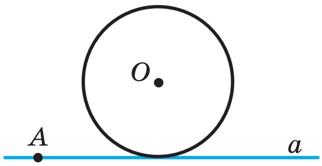


Рис. 20.29

20.35.• Точка A (2; −3) — образ точки B (8; 6) при гомотетії із центром M (4; 0). Знайдіть коефіцієнт гомотетії.

20.36.• Точка A (−7; 10) — образ точки B (−1; −2) при гомотетії з коефіцієнтом −2. Знайдіть центр гомотетії.

20.37.• Точка A_1 $(x; 4)$ — образ точки A $(-6; y)$ при гомотетії із центром у початку координат і коефіцієнтом:

1) $k = \frac{1}{2}$; 2) $k = -2$.

Знайдіть x і y.

20.38.• Точка A_1 $(4; y)$ — образ точки A $(x; -4)$ при гомотетії із центром B (1; −1) і коефіцієнтом $k = -3$. Знайдіть x і y.

20.39.• Середня лінія трикутника відтинає від нього трапецію, площа якої дорівнює 21 см^2. Знайдіть площу даного трикутника.

20.40.• Пряма, паралельна стороні AC трикутника ABC, перетинає його сторону AB у точці M, а сторону BC — у точці K. Знайдіть площу трикутника ABC, якщо $BM = 4$ см, $AC = 8$ см, $AM = MK$, а площа трикутника MBK дорівнює 5 см^2.

20.41.• Продовження бічних сторін AB і CD трапеції $ABCD$ перетинаються в точці E. Знайдіть площу трапеції, якщо $BC : AD = 3 : 5$, а площа трикутника AED дорівнює 175 см^2.

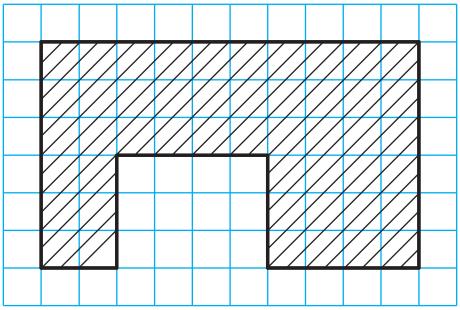


Рис. 20.30

20.42.° На рисунку 20.30 зображено план школи. Обчисліть, яку площу займає школа, якщо план накреслено в масштабі 1 : 2000. Довжина сторони клітинки дорівнює 0,5 см.

20.43.•• Знайдіть образ прямої $y = 2x + 1$ при гомотетії із центром у початку координат і коефіцієнтом:

1) $k = 2$; 2) $k = -\frac{1}{2}$.

20.44.•• Знайдіть образ кола $(x + 2)^2 + (y - 4)^2 = 4$ при гомотетії із центром у початку координат і коефіцієнтом:

1) $k = \frac{1}{2}$; 2) $k = -2$.

20.45.•• Два кола мають внутрішній дотик. Через точку дотику проведено дві прямі, які перетинають кола в точках A_1, A_2, B_1, B_2 (рис. 20.31). Доведіть, що $A_1B_1 \parallel A_2B_2$.

20.46.•• Два кола мають зовнішній дотик. Через точку дотику проведено дві прямі, які перетинають кола в точках A_1, A_2, B_1, B_2 (рис. 20.32). Доведіть, що $A_1B_1 \parallel A_2B_2$.

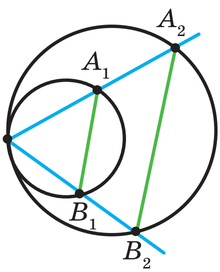


Рис. 20.31

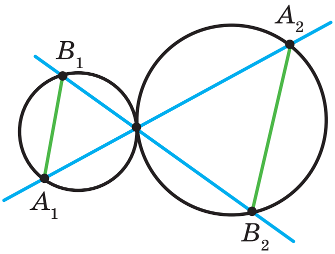


Рис. 20.32

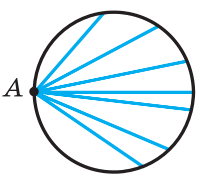


Рис. 20.33

20.47.•• Точка A належить колу (рис. 20.33). Знайдіть геометричне місце точок, які є серединами хорд даного кола, одним із кінців яких є точка A.

20.48.•• Два кола мають внутрішній дотик, причому менше коло проходить через центр більшого. Доведіть, що менше коло ділить навпіл будь-яку хорду більшого кола, яка проходить через точку дотику.

20.49.•• Дано трикутник ABC і довільну точку M. Доведіть, що точки, симетричні точці M відносно середин сторін трикутника ABC, є вершинами трикутника, рівного даному.

20.50.•• Побудуйте трикутник за двома його кутами та радіусом описаного кола.

20.51.•• Побудуйте трикутник за двома його кутами та радіусом вписаного кола.

20.52.•• Відрізок AC — найбільша сторона трикутника ABC. Впишіть у трикутник ABC прямокутник, сторони якого відносяться як $2 : 1$, так, щоб дві вершини більшої сторони прямокутника лежали на стороні AC трикутника, а дві інші вершини — на сторонах AB і BC.

20.53.* Відрізок AB — хорда даного кола, точка C — довільна точка цього кола. Знайдіть геометричне місце точок, які є точками перетину медіан трикутників ABC.

20.54.* Дано дві точки A і B та пряму l. Знайдіть геометричне місце точок, які є точками перетину медіан трикутника ABC, де C — довільна точка прямої l.

20.55.* Точка M належить куту ABC, але не належить його сторонам. Побудуйте коло, яке дотикається до сторін кута і проходить через точку M.

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

20.56. Знайдіть площу ромба та радіус кола, вписаного в ромб, якщо його діагоналі дорівнюють 12 см і 16 см.

20.57. Знайдіть периметр трикутника, утвореного при перетині прямої $3x + 4y = 24$ з осями координат.

20.58. Два кола мають зовнішній дотик у точці A, точки B і C — точки дотику до цих кіл їхньої спільної дотичної. Доведіть, що кут BAC прямий.

ЗАСТОСУВАННЯ ПЕРЕТВОРЕНЬ ФІГУР ПРИ РОЗВ'ЯЗУВАННІ ЗАДАЧ

Перетворення фігур — ефективний метод розв'язування багатьох геометричних задач. Проілюструємо це на прикладах.

Задача 1. На сторонах AB, BC і CA гострокутного трикутника ABC побудуйте такі точки M, N і P відповідно, щоби периметр трикутника MNP був найменшим.

Розв'язання. Нехай P — довільна точка сторони AC трикутника ABC, точки P_1 і P_2 — її образи при симетрії відносно прямих AB і BC відповідно (рис. 20.34). Пряма P_1P_2 перетинає сторони AB і BC відповідно в точках M і N. Із розв'язування задачі 2 п. 18 випливає, що з периметрів усіх трикутників, для яких точка P фіксована, а точки M і N належать сторонам AB і BC, периметр трикутника MNP є найменшим. Цей периметр дорівнює довжині відрізка P_1P_2.

Зауважимо, що відрізок EF — середня лінія трикутника PP_1P_2. Тоді $EF = \frac{1}{2}P_1P_2$.

Оскільки $\angle BEP + \angle BFP = 180°$, то точки P, E, B і F лежать на одному колі з діаметром BP. Звідси $EF = BP \sin B$. Отже, довжина відрізка EF буде найменшою при найменшій довжині відрізка BP, тобто тоді, коли BP — висота трикутника ABC.

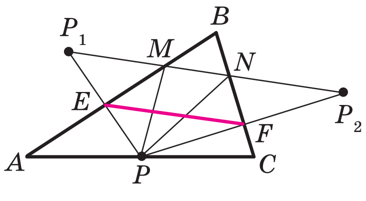


Рис. 20.34

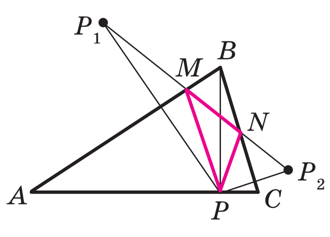


Рис. 20.35

На рисунку 20.35 відрізок BP — висота трикутника ABC. Алгоритм побудови точок M і N зрозумілий з рисунка.

Із побудови випливає, що периметр будь-якого іншого трикутника, вершини якого лежать на сторонах трикутника ABC, більший за периметр трикутника MNP. Тому шуканий трикутник є єдиним — це побудований трикутник MNP.

Можна показати (зробіть це самостійно), що точки M і N є основами висот, проведених відповідно з вершин C і A трикутника ABC.

Отже, вершини шуканого трикутника — це основи висот даного трикутника ABC. Такий трикутник називають **ортоцентричним**. ◄

Задача 2. Точка O — центр правильного n-кутника $A_1A_2...A_n$ (рис. 20.36). Доведіть, що $\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OA_2}+...+\overrightarrow{OA_n}=\vec{0}$.

Розв'язання. Нехай $\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OA_2}+...+\overrightarrow{OA_n}=\vec{a}$. Розглянемо поворот із центром O на кут $\frac{360°}{n}$, наприклад, проти годинникової стрілки. При такому перетворенні образом даного n-кутника буде цей самий n-кутник. Отже, шукана сума не зміниться. А це можливо лише тоді, коли $\vec{a}=\vec{0}$. ◄

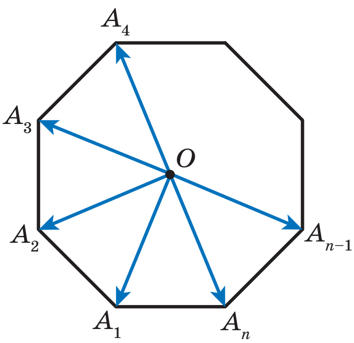


Рис. 20.36

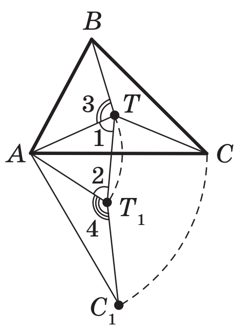


Рис. 20.37

Задача 3. Усередині трикутника ABC, усі кути якого менші від 120°, знайдіть таку точку T, щоб сума $TA + TB + TC$ була найменшою.

Розв'язання. Нехай T — довільна точка даного трикутника ABC (рис. 20.37). Розглянемо поворот із центром A на кут 60° за годинниковою стрілкою. Нехай точки T_1 і C_1 — образи точок T і C відповідно (рис. 20.37). Оскільки поворот є рухом, то $T_1C_1 = TC$. Очевидно, що трикутник ATT_1 є рівностороннім. Тоді $AT = TT_1$.

Маємо: $TA + TB + TC = TT_1 + TB + T_1C_1$.

Зрозуміло, що сума $TT_1 + TB + T_1C_1$ є найменшою, якщо точки B, T, T_1 і C_1 лежать на одній прямій. Оскільки $\angle 1 = \angle 2 = 60°$, то ця умова виконуватиметься тоді, коли $\angle 3 = \angle 4 = 120°$.

Оскільки кут AT_1C_1 — образ кута ATC при вказаному повороті, то має виконуватися рівність $\angle ATC = 120°$.

Отже, точки B, T, T_1 і C_1 належатимуть одній прямій тоді й тільки тоді, коли $\angle ATB = \angle ATC = 120°$. Звідси $\angle BTC = 120°$.

Таким чином, сума $TA + TB + TC$ буде найменшою, якщо $\angle ATB = \angle BTC = \angle ATC = 120°$.

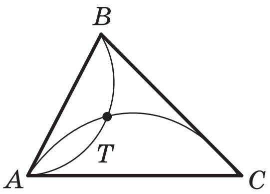


Рис. 20.38

Знайти точку T можна, наприклад, побудувавши ГМТ, з яких відрізки AB і AC видно під кутами 120° (рис. 20.38).

Зрозуміло, що коли один із кутів трикутника ABC не менший від 120°, то точка перетину побудованих дуг не буде розміщена всередині трикутника. Можна показати, що в трикутнику з кутом, не меншим від 120°, точка T, сума відстаней від якої до вершин трикутника є найменшою, збігається з вершиною тупого кута. ◄

Задача 4. Відрізки AA_1, BB_1 і CC_1 — висоти гострокутного трикутника ABC. Доведіть, що радіус описаного кола трикутника ABC удвічі більший за радіус описаного кола трикутника $A_1B_1C_1$.

Розв'язання. Нехай прямі AA_1, BB_1 і CC_1 перетинають описане коло трикутника ABC відповідно в точках M, N і P (рис. 20.39). Доведемо, що $HA_1 = A_1M$, де точка H — ортоцентр трикутника ABC.

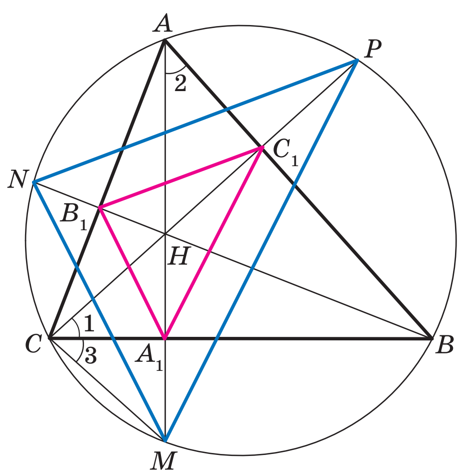


Рис. 20.39

Маємо: $\angle 1 = \angle 2 = 90° - \angle ABC$.

Кути 2 і 3 рівні як вписані, що спираються на дугу MB. Отже, $\angle 1 = \angle 3$.

Тоді в трикутнику HCM відрізок CA_1 є бісектрисою та висотою, а отже, і медіаною. Звідси $HA_1 = A_1M$.

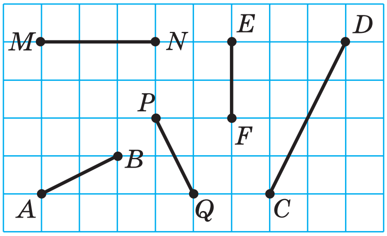
Аналогічно можна довести, що $HB_1 = B_1N$, $HC_1 = C_1P$.

Тепер зрозуміло, що трикутник MNP гомотетичний трикутнику $A_1B_1C_1$ із центром H і коефіцієнтом 2. Тоді радіус описаного кола трикутника MNP удвічі більший за радіус описаного кола трикутника $A_1B_1C_1$. Залишилося зауважити, що трикутники MNP і ABC вписані в одне й те саме коло. ◄

ЗАВДАННЯ № 5 «ПЕРЕВІРТЕ СЕБЕ» В ТЕСТОВІЙ ФОРМІ

1. Який із відрізків, зображених на рисунку, може бути образом відрізка AB при русі?

А) MN; Б) PQ; В) EF; Г) DC.

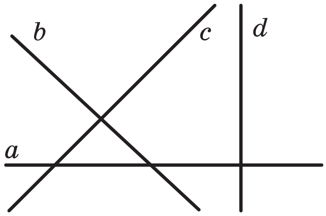


2. Укажіть рівняння образу прямої $y = 2x$ при паралельному перенесенні на вектор $\vec{a}$ (0; 1).

А) $y = 2x + 1$; В) $y = x + 1$;
Б) $y = 2x - 1$; Г) $y = x - 1$.

3. Яка з прямих, зображених на рисунку, може бути образом прямої a при паралельному перенесенні?

А) b; Б) c; В) d; Г) a.



4. Яка з указаних фігур має тільки одну вісь симетрії?

А) Квадрат; В) парабола;
Б) коло; Г) відрізок.

5. При яких значеннях x та y точки A (−1; y) і B (x; 6) симетричні відносно осі абсцис?

А) $x = -1$, $y = 6$; В) $x = -1$, $y = -6$;
Б) $x = 1$, $y = -6$; Г) $x = 1$, $y = 6$.

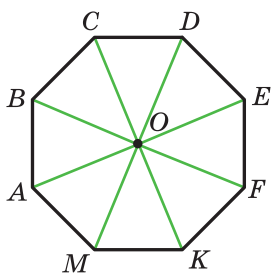
6. Яка з указаних фігур має центр симетрії?

А) Трикутник; В) трапеція;
Б) відрізок; Г) кут.

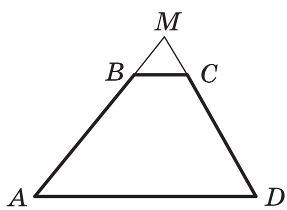
7. Яка з указаних фігур має центр симетрії та вісь симетрії?
А) Рівносторонній трикутник;
Б) паралелограм;
В) рівнобічна трапеція;
Г) пряма.

8. При яких значеннях x та y точки $A\ (x;\ 7)$ і $B\ (-4;\ y)$ симетричні відносно початку координат?
А) $x = 4,\ y = -7$;
Б) $x = 4,\ y = 7$;
В) $x = -4,\ y = 7$;
Г) $x = -4,\ y = -7$.

9. Точка O — центр правильного восьмикутника $ABCDEFKM$ (див. рисунок). Укажіть образ сторони EF при повороті навколо точки O за годинниковою стрілкою на кут $135°$.
А) AB; Б) BC; В) AM; Г) CD.



10. Продовження бічних сторін AB і CD трапеції $ABCD$ перетинаються в точці M (див. рисунок). Укажіть коефіцієнт гомотетії із центром у точці M, при якій відрізок BC є образом відрізка AD, якщо $AB : BM = 7 : 2$.
А) $\frac{2}{7}$; Б) $\frac{7}{2}$; В) $\frac{2}{9}$; Г) $\frac{9}{2}$.



11. Точка M (6; –3) — образ точки N (2; 1) при гомотетії з коефіцієнтом $-\frac{1}{3}$. Укажіть координати центра гомотетії.

А) (5; –2); В) (–5; 2);
Б) (8; –1); Г) (–8; 1).

12. Пряма, паралельна стороні AB трикутника ABC, перетинає його сторону AC у точці E, а сторону BC — у точці F. Знайдіть площу трикутника CEF, якщо $AE : EC = 3 : 2$, а площа трикутника ABC дорівнює 75 см^2.

А) 36 см^2; В) 30 см^2;
Б) 50 см^2; Г) 12 см^2.

ГОЛОВНЕ В ПАРАГРАФІ 5

Рух (переміщення)

Перетворення фігури F, яке зберігає відстань між точками, називають рухом (переміщенням) фігури F.

Рівні фігури

Дві фігури називають рівними, якщо існує рух, при якому одна з даних фігур є образом другої.

Паралельне перенесення

Якщо точки X і X_1 є такими, що $\overrightarrow{XX_1} = \vec{a}$, то говорять, що точка X_1 — це образ точки X при паралельному перенесенні на вектор $\vec{a}$.

Властивості паралельного перенесення

Паралельне перенесення є рухом.

Якщо фігура F_1 — образ фігури F при паралельному перенесенні, то $F_1 = F$.

Осьова симетрія

Точки A і A_1 називають симетричними відносно прямої l, якщо пряма l є серединним перпендикуляром відрізка AA_1. Якщо точка A належить прямій l, то її вважають симетричною самій собі відносно прямої l.

Властивості осьової симетрії

Осьова симетрія є рухом.

Якщо фігури F і F_1 симетричні відносно прямої, то $F = F_1$.

Фігура, яка має вісь симетрії

Фігуру називають симетричною відносно прямої l, якщо для кожної точки даної фігури точка, симетрична їй відносно прямої l, також належить цій фігурі. Пряму l називають віссю симетрії фігури.

Центральна симетрія

Точки A і A_1 називають симетричними відносно точки O, якщо точка O є серединою відрізка AA_1. Точку O вважають симетричною самій собі.

Властивості центральної симетрії

Центральна симетрія є рухом.

Якщо фігури F і F_1 симетричні відносно точки, то $F = F_1$.

Фігура, яка має центр симетрії

Фігуру називають симетричною відносно точки O, якщо для кожної точки даної фігури точка, симетрична їй відносно точки O, також належить цій фігурі. Точку O називають центром симетрії фігури.

Властивості повороту

Поворот є рухом.

Якщо фігура F_1 — образ фігури F при повороті, то $F_1 = F$.

Гомотетія

Якщо точки O, X і X_1 є такими, що $\overrightarrow{OX_1} = k\overrightarrow{OX}$, де $k \neq 0$, то говорять, що точка X_1 — це образ точки X при гомотетії із центром O та коефіцієнтом k.

Властивості гомотетії

При гомотетії фігури F із коефіцієнтом k усі відстані між її точками змінюються в $|k|$ разів, тобто якщо A і B — довільні точки фігури F, а точки A_1 і B_1 — їхні відповідні образи при гомотетії з коефіцієнтом k, то $A_1B_1 = |k|AB$.

Подібність

Дві фігури називають подібними, якщо одну з них можна отримати з другої в результаті композиції двох перетворень: гомотетії та руху.

Площі подібних многокутників

Відношення площ подібних многокутників дорівнює квадрату коефіцієнта подібності.

21. Вправи для повторення курсу геометрії 9 класу

1. Розв'язування трикутників

21.1. Дві сторони трикутника дорівнюють 4 см і 10 см, а синус кута між ними дорівнює $\frac{4}{5}$. Знайдіть третю сторону трикутника.

21.2. У паралелограмі $ABCD$ відомо, що $AB = 2$ см, $AD = 4$ см, $\angle BAD = 60°$. Знайдіть косинус кута між прямими AC і BD.

21.3. Установіть, гострокутним, прямокутним чи тупокутним є трикутник зі сторонами: 1) 4 см, 4 см, 5 см; 2) 5 см, 6 см, 9 см; 3) 5 см, 12 см, 13 см.

21.4. Одна зі сторін трикутника дорівнює 21 см, а дві інші сторони відносяться як 3 : 8. Знайдіть невідомі сторони трикутника, якщо кут між ними дорівнює 60°.

21.5. Одна зі сторін трикутника дорівнює 3 см, а друга сторона — $\sqrt{7}$ см, причому кут, протилежний другій стороні, дорівнює 60°. Знайдіть невідому сторону трикутника.

21.6. Одна зі сторін паралелограма на 4 см більша за другу, а його діагоналі дорівнюють 12 см і 14 см. Знайдіть периметр паралелограма.

21.7. У трапеції $ABCD$ відомо, що $BC \parallel AD$, $AD = 8$ см, $CD = 4\sqrt{3}$ см. Коло, яке проходить через точки A, B і C, перетинає пряму AD у точці K, $\angle AKB = 60°$. Знайдіть відрізок BK.

21.8. Основи трапеції дорівнюють 3 см і 7 см, а бічні сторони — 6 см і 5 см. Знайдіть косинуси кутів трапеції.

21.9. Коло, вписане в трикутник ABC, дотикається до сторони AB у точці D, $BD = 1$ см, $AD = 5$ см, $\angle ABC = 120°$. Знайдіть відрізок CD.

21.10. Сторони трикутника дорівнюють 11 см, 12 см і 13 см. Знайдіть медіану трикутника, проведену до його більшої сторони.

21.11. Знайдіть бісектрису трикутника, яка ділить його сторону на відрізки завдовжки 3 см і 4 см та утворює із цією стороною кут, що дорівнює 60°.

21.12. Відрізок BD — бісектриса трикутника ABC, $BD = a$, $\angle A = 45°$, $\angle C = 75°$. Знайдіть відрізок AD.

21.13. Знайдіть відношення сторін рівнобедреного трикутника, один із кутів якого дорівнює $120°$.

21.14. У трикутнику ABC відомо, що $AC = 6\sqrt{3}$ см, $\angle ABC = 60°$. Знайдіть радіус кола, яке проходить через центр вписаного кола трикутника ABC та точки A і C.

21.15. Дві сторони трикутника дорівнюють 5 см і 8 см, а кут між ними — $60°$. Знайдіть радіус кола, описаного навколо даного трикутника.

21.16. Знайдіть бісектрису трикутника ABC, проведену з вершини A, якщо $\angle BAC = \alpha$, $AC = b$, $AB = c$.

21.17. Бісектриса кута BAD паралелограма $ABCD$ перетинає сторону BC у точці M. Знайдіть площу трикутника ABM, якщо $AB = 4$ см, $\angle BAD = 60°$.

21.18. Знайдіть найбільшу висоту, радіуси вписаного й описаного кіл трикутника зі сторонами 4 см, 13 см і 15 см.

21.19. Радіуси двох кіл дорівнюють 17 см і 39 см, а відстань між їхніми центрами — 44 см. Знайдіть довжину спільної хорди даних кіл.

21.20. Обчисліть площу паралелограма, одна зі сторін якого дорівнює 15 см, а діагоналі — 11 см і 25 см.

21.21. Основи трапеції дорівнюють 16 см і 44 см, а бічні сторони — 17 см і 25 см. Знайдіть площу трапеції.

21.22. Основи трапеції дорівнюють 5 см і 12 см, а діагоналі — 9 см і 10 см. Знайдіть площу трапеції.

2. Правильні многокутники

21.23. Знайдіть площу правильного n-кутника, якщо радіус вписаного в нього кола дорівнює 6 см, а n дорівнює: 1) 3; 2) 4; 3) 6.

21.24. У коло вписано квадрат зі стороною 4 см. Знайдіть площу правильного трикутника, вписаного в це саме коло.

21.25. Знайдіть відношення площ правильних трикутника та шестикутника, вписаних в одне й те саме коло.

21.26. Середини сторін правильного дванадцятикутника сполучили через одну так, що отриманою фігурою є правильний шестикутник. Знайдіть сторону даного дванадцятикутника, якщо сторона утвореного шестикутника дорівнює a.

21.27. Довжина дуги кола дорівнює 6π см, а її градусна міра — $24°$. Знайдіть радіус кола.

21.28. На катеті AC прямокутного трикутника ABC ($\angle C = 90°$) як на діаметрі побудовано коло. Знайдіть довжину дуги цього кола, яка міститься поза трикутником і відтинається гіпотенузою AB, якщо $\angle A = 42°$, $AC = 8$ см.

21.29. Сторона квадрата дорівнює $2\sqrt{2}$ см. Знайдіть довжину дуги описаного кола даного квадрата, кінцями якої є дві його сусідні вершини.

21.30. Відстань між центрами двох кругів радіуса R дорівнює R. Знайдіть площу фігури, яка є спільною частиною цих кругів, і довжину лінії, що обмежує цю фігуру.

21.31. Площа кругового сектора дорівнює $2{,}4\pi$ см^2. Знайдіть градусну міру дуги цього сектора, якщо радіус круга дорівнює 4 см.

21.32. Діаметр колеса вагона поїзда метрополітену дорівнює 78 см. За 2,5 хв колесо робить 1000 обертів. Знайдіть швидкість поїзда метрополітену в кілометрах за годину. Відповідь округліть до десятих.

21.33. Знайдіть довжину кола, вписаного в сегмент, довжина дуги якого дорівнює m, а градусна міра дорівнює $120°$.

21.34. До кола, радіус якого дорівнює R, проведено дві дотичні, кут між якими дорівнює $60°$. Знайдіть площу фігури, обмеженої дотичними та меншою з дуг, кінцями яких є точки дотику.

3. Декартові координати на площині

21.35. Вершинами трикутника є точки $A\ (-4;\ 1)$, $B\ (-2;\ 4)$ і $C\ (0;\ 1)$. Доведіть, що трикутник ABC рівнобедрений, і знайдіть його площу.

21.36. Знайдіть координати точки перетину серединного перпендикуляра відрізка AB з віссю абсцис, якщо $A\ (5;\ -3)$, $B\ (4;\ 6)$.

21.37. Знайдіть координати точки перетину серединного перпендикуляра відрізка CD з віссю ординат, якщо $C\ (2;\ 1)$, $D\ (4;\ -3)$.

21.38. Доведіть, що чотирикутник $ABCD$ з вершинами в точках $A\ (-12;\ 6)$, $B\ (0;\ 11)$, $C\ (5;\ -1)$ і $D\ (-7;\ -6)$ є квадратом.

21.39. Точка $M\ (5;\ -2)$ є одним із кінців діаметра кола, точка $N\ (2;\ 0)$ — центр кола. Знайдіть координати другого кінця діаметра.

21.40. Установіть, чи лежать точки $A\ (-4;\ -3)$, $B\ (26;\ 7)$ і $C\ (2;\ -1)$ на одній прямій. У разі ствердної відповіді вкажіть, яка з точок лежить між двома іншими.

21.41. Доведіть, що трикутник, вершинами якого є точки $A\ (5;\ 1)$, $B\ (9;\ -2)$ і $C\ (7;\ 2)$, прямокутний, і складіть рівняння кола, описаного навколо нього.

21.42. Установіть, чи є відрізок CD діаметром кола $(x+2)^2+(y-3)^2=$ $=52$, якщо $C\ (-8;\ 7)$, $D\ (4;\ -1)$.

21.43. Коло, центр якого належить осі ординат, проходить через точки $A\ (1;\ 2)$ і $B\ (3;\ 6)$. Чи належить цьому колу точка $C\ (-3;\ 4)$?

21.44. Коло із центром у точці $M\ (-5;\ 3)$ дотикається до осі ординат. Знайдіть координати точок перетину кола з віссю абсцис.

21.45. Знайдіть довжину лінії, заданої рівнянням
$$x^2+y^2-2x+4y-20=0.$$

21.46. Складіть рівняння прямої, яка проходить через точку $P\ (-3;\ 5)$ і кутовий коефіцієнт якої дорівнює 6.

21.47. Складіть рівняння прямої, яка проходить через точку $S\ (-1;\ 4)$ та утворює кут 135° з додатним напрямом осі абсцис.

21.48. Складіть рівняння прямої, яка проходить через точку $A\ (-3;\ 1)$ паралельно прямій $5x+3y=6$.

21.49. Знайдіть рівняння геометричного місця центрів кіл, які проходять через точки $A\ (-3;\ -2)$ і $B\ (2;\ 5)$.

4. Вектори на площині

21.50. Дві вершини прямокутника $ABCD$ — точки $A\ (3;\ 2)$ і $B\ (3;\ -4)$. Модуль вектора $\overrightarrow{BD}$ дорівнює 10. Знайдіть координати точок C і D.

21.51. Діагоналі паралелограма $ABCD$ перетинаються в точці O (рис. 21.1). Виразіть вектори $\overrightarrow{CD}$ і $\overrightarrow{AD}$ через вектори $\overrightarrow{CO}=\vec{a}$ і $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$.

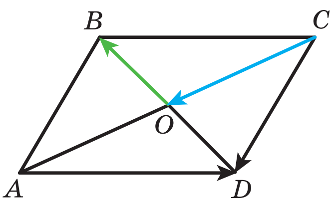


Рис. 21.1

21.52. Чотирикутник $ABCD$ — паралелограм. Знайдіть:

1) $\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{CB}$;

2) $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{DA}-\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{CD}$;

3) $\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{AC}$.

21.53. Знайдіть модуль вектора $\vec{n} = 3\vec{a} - 2\vec{b}$, де $\vec{a}\,(1; -2)$, $\vec{b}\,(-1; 3)$.

21.54. Точки E і F — середини сторін AB і BC паралелограма $ABCD$ відповідно (рис. 21.2). Виразіть вектор $\overrightarrow{EF}$ через вектори $\overrightarrow{BC} = \vec{a}$ і $\overrightarrow{CD} = \vec{b}$.

21.55. На сторонах BC і CD паралелограма $ABCD$ позначено точки M і K відповідно, причому $BM = \frac{1}{4}BC$, $CK = \frac{2}{3}CD$ (рис. 21.3). Виразіть вектори $\overrightarrow{AM}$ і $\overrightarrow{AK}$ через вектори $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ і $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$.

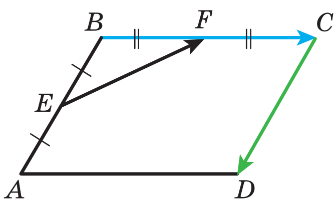


Рис. 21.2

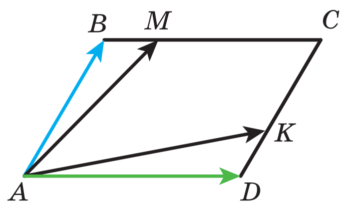


Рис. 21.3

21.56. На сторонах AB і BC трикутника ABC позначено такі точки D і E відповідно, що $AD : DC = 1 : 2$, $BE : EC = 2 : 1$. Виразіть вектори $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AE}$ і $\overrightarrow{CD}$ через вектори $\overrightarrow{BE} = \vec{a}$ і $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$.

21.57. Чи колінеарні вектори $\overrightarrow{MN}$ і $\overrightarrow{KP}$, якщо $M\,(4; -1)$, $N\,(-6; 5)$, $K\,(7; -2)$, $P\,(2; 1)$?

21.58. Знайдіть значення k, при якому вектори $\vec{a}\,(k; -2)$ і $\vec{b}\,(6; 3)$ колінеарні.

21.59. Дано вектори $\vec{a}\,(3; -2)$ і $\vec{b}\,(x; 4)$. При якому значенні x виконується рівність $\vec{a} \cdot \vec{b} = 1$?

21.60. Знайдіть косинуси кутів трикутника ABC, якщо $A\,(-3; -4)$, $B\,(2; -3)$, $C\,(3; 5)$. Установіть вид трикутника.

21.61. Дано вектори $\vec{a}\,(2; -1)$ і $\vec{b}\,(1; -2)$. Знайдіть значення m, при якому вектори $\vec{a} + m\vec{b}$ і $\vec{b}$ перпендикулярні.

21.62. Знайдіть косинус кута між векторами $\vec{a} = 3\vec{m} + \vec{n}$ і $\vec{b} = \vec{m} - 2\vec{n}$, якщо $|\vec{m}| = |\vec{n}| = 1$ і $\vec{m} \perp \vec{n}$.

21.63. Дано вектори $\vec{a}\,(2; -4)$ і $\vec{b}\,(-1; 1)$. Знайдіть:

1) $|\vec{a} - \vec{b}|$; 2) $|2\vec{a} + \vec{b}|$.

21.64. Складіть рівняння прямої, яка дотикається до кола із центром M (0; –4) у точці A (5; –3).

5. Геометричні перетворення

21.65. При паралельному перенесенні образом точки A (3; –2) є точка B (5; –3). Яка точка є образом точки C (–3; 4) при цьому паралельному перенесенні?

21.66. Побудуйте образи точок A (1; –3), B (0; –5) і C (2; 1) при паралельному перенесенні на вектор $\vec{a}\,(-2; 1)$. Запишіть координати побудованих точок.

21.67. Дано точки C (7; –4) і D (–1; 8). При паралельному перенесенні образом середини відрізка CD є точка P (–1; –3). Знайдіть координати точок, які є образами точок C і D.

21.68. На рисунку 21.4 $CB = CD$, $\angle ACB = \angle ACD$. Доведіть, що точки B і D симетричні відносно прямої AC.

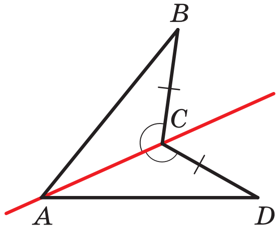


Рис. 21.4

21.69. Знайдіть координати точок, симетричних точці K (4; –2) відносно осей координат і початку координат.

21.70. Знайдіть x і y, якщо точки A (x; –2) і B (3; y) симетричні відносно осі абсцис.

21.71. Дано промінь OA та точку B, що йому не належить. Побудуйте промінь, симетричний даному відносно точки B.

21.72. Чи симетричні точки M (–3; 10) і N (–1; 6) відносно точки K (1; 4)?

21.73. Запишіть рівняння кола, яке симетричне колу $(x + 4)^2 + (y - 5)^2 = 11$ відносно:

1) початку координат; 2) точки M (–3; 3).

21.74. Дано точки K і O. Побудуйте точку K_1, яка є образом точки K при повороті навколо точки O: 1) на кут 130° проти годинникової стрілки; 2) на кут 40° за годинниковою стрілкою.

21.75. Дано відрізок AB і точку O, яка йому не належить. Побудуйте відрізок A_1B_1, який є образом відрізка AB при повороті на кут 50° навколо точки O за годинниковою стрілкою.

21.76. На який кут треба повернути прямокутник, відмінний від квадрата, навколо його центра симетрії, щоб його образом був цей самий прямокутник?

21.77. Побудуйте трикутник, гомотетичний даному тупокутному трикутнику, якщо центром гомотетії є центр описаного кола трикутника, коефіцієнт гомотетії $k = -2$.

21.78. Образом точки A (8; −2) при гомотетії із центром у початку координат є точка B (4; −1). Знайдіть коефіцієнт гомотетії.

21.79. Сторони двох правильних трикутників дорівнюють 8 см і 28 см. Чому дорівнює відношення їхніх площ?

21.80. Многокутник F_1 подібний многокутнику F_2 з коефіцієнтом подібності k. Буквами P_1, P_2, S_1, S_2 позначено відповідно їхні периметри та площі. Заповніть порожні клітинки в таблиці.

P_1	P_2	S_1	S_2	k
	19	64	16	
12	36	7		
	35	4	100	
	21	36		2

21.81. Пряма, паралельна стороні трикутника завдовжки 6 см, ділить його на дві фігури, площі яких відносяться як 1 : 3. Знайдіть відрізок цієї прямої, що міститься між сторонами трикутника.

21.82. На стороні BC квадрата $ABCD$ позначили точку M так, що $BM : MC = 1 : 2$. Відрізки AM і BD перетинаються в точці P. Знайдіть площу трикутника BPM, якщо площа трикутника APD дорівнює 27 см^2.

21.83. Продовження бічних сторін AB і CD трапеції $ABCD$ перетинаються в точці M. Знайдіть площу трапеції, якщо $AB : BM = 5 : 3$, $AD > BC$, а площа трикутника AMD дорівнює 32 см^2.

21.84. У трикутнику ABC відомо, що $AB = BC = 13$ см, $AC = 10$ см. До кола, вписаного в цей трикутник, проведено дотичну, яка паралельна основі AC та перетинає сторони AB і BC у точках M і K відповідно. Обчисліть площу трикутника MBK.

21.85. На продовженнях медіан AA_1, BB_1 і CC_1 трикутника ABC позначили відповідно точки A_2, B_2 і C_2 так, що $A_1A_2 = \frac{1}{2}AA_1$, $B_1B_2 = \frac{1}{2}BB_1$, $C_1C_2 = \frac{1}{2}CC_1$ (рис. 21.5). Знайдіть площу трикутника $A_2B_2C_2$, якщо площа трикутника ABC дорівнює 1 см².

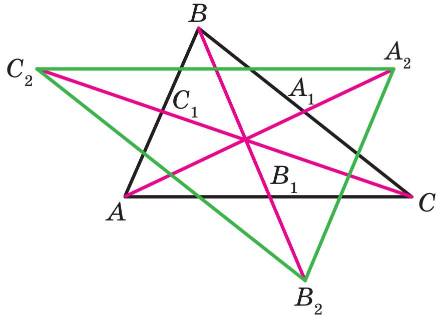


Рис. 21.5

Дружимо з комп'ютером

Ви продовжите вдосконалювати навички користування комп'ютером, що їх набули в 7 і 8 класах, опановувати нові інструменти та нові програмні засоби. Нагадаємо, що, крім завдань, наведених у цьому розділі, ви можете використовувати різноманітні програми, створені для вивчення шкільного курсу геометрії. Ви можете звертатися до глобальної мережі Інтернет для пошуку таких програм та іншої додаткової інформації до курсу геометрії.

У підручнику наведено стислі історичні відомості про знаменитих учених, праці яких пов'язані з темами, що вивчаються. За допомогою глобальної мережі Інтернет ви можете отримати більше інформації про їхні біографії та наукові відкриття.

Якщо ви плануєте вибрати професію, що потребує постійно використовувати знання з математики, то можна почати опановувати математичні пакети (наприклад, *Mathcad*, *MATLAB* і т. п.), які містять потужний інструментарій для математичних обчислень, геометричних побудов тощо. Для майбутнього інженера необхідними є знання інженерної графіки та вміння будувати складні креслення (набути цих знань можна, наприклад, користуючись пакетом *AutoCAD*). Ви можете опановувати ці програмні засоби, виконуючи завдання до курсу геометрії.

У цьому розділі наведено завдання, які ви можете виконувати за допомогою комп'ютера в міру вивчення відповідних тем. Переважно це завдання на побудову геометричних фігур, які ви виконуватимете за допомогою графічного редактора, та обчислення, які ви можете виконувати за допомогою калькулятора або математичних пакетів.

Крім цих завдань, ви можете виконувати завдання з рубрики «Практичні завдання» не лише в зошиті, а й за допомогою графічного редактора.

Значна частина курсу геометрії 9 класу присвячена декартовим координатам на площині, рівнянням деяких фігур. Залежно від можливостей мови програмування, яку ви вивчаєте на уроках інформатики або самостійно, рекомендуємо написати програми для зображення на екрані комп'ютера точок із заданими координатами; прямих і кіл із заданими рівняннями тощо. Ці завдання можна виконувати на уроках інформатики або під час позакласної роботи із самостійного вивчення програмування. Нижче наведено найпростіші завдання; узявши їх за ідеї, ви можете самостійно придумувати нові завдання та створювати програми для їх виконання.

Синус, косинус і тангенс кута від 0° до 180°

1. Навчіться обчислювати тригонометричні функції кута, а також знаходити величину кута за значеннями його тригонометричних функцій за допомогою калькулятора.

Теорема косинусів

2. Проілюструйте наслідок з теореми косинусів за допомогою графічного редактора таким чином.

Виберіть набір додатних чисел, які задовольняють умову $a^2 < b^2 + c^2$, де a — найбільше число з вибраних. Побудуйте набір відрізків із заданими довжинами a, b і c. Складіть із цих відрізків трикутник. Чи виявився він гострокутним? Виконайте такі самі дії для умов $a^2 > b^2 + c^2$ і $a^2 = b^2 + c^2$. Числа a, b і c мають задовольняти умову $a < b + c$.

Теорема синусів

3. Зобразіть довільний трикутник, виміряйте за допомогою засобів графічного редактора його сторони та кути. Перевірте, чи виконується теорема синусів. Обчислення проводьте також за допомогою комп'ютера.

Розв'язування трикутників. Формули для знаходження площі трикутника

4. Завдання пп. 4, 5, які потребують знаходження значень тригонометричних функцій і проведення значного обсягу обчислень, виконуйте за допомогою комп'ютера.

Правильні многокутники та їхні властивості

5. Придумайте, як будувати правильні многокутники. Розгляньте два способи: 1) використайте теорему 6.2 і формулу для обчислення величини центрального кута вписаного многокутника; 2) використайте інформацію про величину кута правильного многокутника та довжину його сторони.
6. Побудуйте кілька правильних многокутників із заданою кількістю сторін.

Довжина кола. Площа круга

7. Обчисліть кілька разів довжину кола та площу круга, використовуючи наближення числа π з різною точністю.

Чи є в калькуляторі або математичному пакеті, яким ви користуєтеся, засоби для використання стандартного значення числа π? З якою точністю подають число π ці засоби?

Відстань між двома точками із заданими координатами. Координати середини відрізка

8. Більшість графічних редакторів подають поле для креслення у вигляді координатної площини. Дослідіть, яким чином задаються координати точок на цій площині. Продумайте, як ви можете використовувати цей інструментарій для виконання побудов.

Рівняння фігури

9. Якщо ви вивчаєте математичні пакети, то можете їхніми засобами побудувати кілька довільних фігур із заданими рівняннями.
10. Вивчаючи програмування на уроках інформатики, ви можете створити свої засоби для зображення на екрані комп’ютера фігур за заданим рівнянням.
11. Знайдіть у глобальній мережі Інтернет інформацію про пристрої для автоматизації креслярських робіт (так звані плотери, англ. *plotter*). Чим схожі та чим відрізняються принципи побудови зображень на екрані комп’ютера й на папері плотера? Ознайомтеся з поняттям «черепашача графіка».
12. Напишіть програму, яка за заданими значеннями величин a, b і c робить висновок, яка фігура є графіком рівняння $ax + by = c$, виводить повідомлення про це та зображає цей графік на екрані комп’ютера.

Кутовий коефіцієнт прямої

13. Які засоби графічного редактора можна використати, щоби побудувати пряму із заданим кутовим коефіцієнтом?
14. Напишіть програму, яка за заданими значеннями величин k і b будує зображення прямої $y = kx + b$ на екрані комп’ютера.

Поняття вектора

15. Зобразіть за допомогою графічного редактора кілька векторів, які ілюструють зміст п. 12 підручника. Який інструмент ви використаєте для побудови колінеарних векторів? співнапрямлених векторів? протилежно напрямлених векторів? Визначте модулі побудованих векторів. Як це зробити найпростіше?

Координати вектора

16. Зобразіть на екрані комп’ютера декартову систему координат, виберіть зручний одиничний відрізок. Задайте координати вектора та координати деякої точки. Відкладіть від цієї точки вектор із заданими координатами.

Додавання і віднімання векторів

17. Нарисуйте кілька довільних векторів. За допомогою якого інструмента графічного редактора найпростіше знаходити суму й різницю цих векторів?

Множення вектора на число

18. Нарисуйте довільний вектор і задайте кілька довільних чисел (натуральних, цілих, дробових). Побудуйте вектори, які є добутками нарисованого вектора та цих чисел.

Скалярний добуток векторів

19. Побудуйте на координатній площині два довільних вектори. Знайдіть величину кута між ними за допомогою наслідку з теореми 16.2. Перевірте отриманий результат, визначивши кут між цими векторами за допомогою засобів графічного редактора.

Геометричні перетворення

20. Визначте, які засоби графічного редактора дають змогу виконувати переміщення фігури. Які види переміщення можна реалізувати за їхньою допомогою?
21. Знайдіть засоби графічного редактора, за допомогою яких можна побудувати: 1) фігуру, симетричну даній фігурі відносно даної прямої; 2) фігуру, симетричну даній фігурі відносно даної точки; 3) фігуру, гомотетичну даній фігурі.
22. Знайдіть засоби графічного редактора, за допомогою яких можна побудувати фігуру, подібну даній довільній фігурі. Які засоби треба використати, щоб ці фігури були подібними із заданим коефіцієнтом?

Відповіді та вказівки до вправ

§ 1. Розв'язування трикутників

1. Синус, косинус і тангенс кута від $0°$ до $180°$

1.11. 3) $\frac{\sqrt{13}}{4}$ або $-\frac{\sqrt{13}}{4}$; 4) 0,6. **1.12.** 1) $\frac{12}{13}$ або $-\frac{12}{13}$; 2) $\frac{\sqrt{35}}{6}$. **1.15.** 1) $2-\sqrt{3}$; 2) $-1,5$; 3) $-\sqrt{3}-2$. **1.16.** 1) 3; 2) $\frac{2}{3}$. **1.21.** $-\frac{1}{2}$. **1.22.** $120°$. **1.23.** 10 см, $30°$, $120°$. **1.26.** $5\sqrt{6}$ см.

2. Теорема косинусів

2.3. $120°$. **2.4.** $45°$. **2.10.** $2\sqrt{7}$ см. **2.11.** $\sqrt{10}$ см. **2.12.** $\sqrt{21}$ см або $\sqrt{29}$ см. **2.13.** 13 см. **2.14.** $a\sqrt{2+\sqrt{2}}$. **2.15.** $3\sqrt{89}$ см. **2.16.** $\sqrt{a^2+b^2+ab\sqrt{2}}$. **2.17.** $\sqrt{a^2+b^2-ab}$. **2.18.** 15 см, 24 см. **2.19.** 2 см, $4\sqrt{3}$ см. **2.20.** 3 см, 5 см. **2.21.** 10 см, 6 см, 14 см. **2.22.** 6 см або 10 см. **2.23.** 75 см. **2.24.** 13 см. **2.25.** $\sqrt{79}$ см. **2.29.** 14 см. **2.30.** 34 см. **2.31.** 7 см, 9 см. **2.32.** 20 см, 30 см. **2.33.** 8 см. *Вказівка*. Проведіть через вершину B пряму, паралельну стороні CD, і розгляньте трикутник, який при цьому утворився. **2.34.** $\frac{13}{20}$. **2.35.** $\sqrt{\frac{247}{7}}$ см. **2.36.** Ні. **2.38.** 10 см. **2.39.** 6 см. **2.40.** 11 см. **2.41.** 6 см. **2.42.** 22 см. **2.47.** 4 см, 6 см.

3. Теорема синусів

3.14. $2\sqrt{6}$ см. **3.15.** 6 см. **3.16.** $\frac{a\sin\beta}{\cos(\beta+\gamma)\sin\gamma}$. **3.17.** $\frac{m\sin\alpha\sin\beta}{\sin(\alpha-\beta)}$. **3.18.** $\frac{c\sin\alpha\sin(\alpha+\gamma)}{\sin\gamma\sin\varphi}$. **3.19.** $\frac{m\sin\alpha\sin\varphi}{\sin\beta\sin(\alpha+\beta)}$. **3.21.** 9 см. **3.22.** $\frac{25}{3}$ см. **3.23.** $60°$ або $120°$. **3.24.** 4,5 год. **3.25.** $\frac{b\sin\alpha\sin\gamma}{\sin(\alpha+\gamma)\cos\frac{\alpha-\gamma}{2}}$. **3.26.** $\frac{a\cos\frac{\alpha}{2}}{\sin\left(45°+\frac{3\alpha}{4}\right)}$. **3.28.** $\frac{85}{8}$ см. *Вказівка*. Шуканий радіус можна знайти як радіус кола, описаного навколо трикутника, сторонами якого є одна з основ, бічна сторона та діагональ трапеції. **3.29.** $\frac{a\sin\alpha}{\sin\beta}$. *Вказівка.* Доведіть, що $CE = DE$. **3.30.** $\frac{2m\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$, $\frac{2m\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}$. *Вказівка.* На продовженні медіани AM за точку M позначте точку K таку, що $AM = MK$, і застосуйте теорему синусів до трикутника ACK або трикутника ABK. **3.31.** $\frac{a\sin(\alpha+\beta)}{2\sin\alpha}$.

3.32. *Вказівка.* Виразіть кути AHB, BHC і AHC через кути трикутника ABC. **3.33.** Швидше доїхати через село C. *Вказівка.* Прийміть відстань між якими-небудь двома селами за a і виразіть через a відстані між іншими селами. **3.34.** Автобус. **3.37.** 12 см.

4. Розв'язування трикутників

4.12. 107°, 73°, 132°, 48°. *Вказівка.* Проведіть через одну з вершин меншої основи пряму, паралельну бічній стороні трапеції, і розгляньте трикутник, який при цьому утворився. **4.13.** 9 см. **4.14.** 30 см, 48 см.

5. Формули для знаходження площі трикутника

5.4. 1) 60° або 120°; 2) 90°. **5.5.** 30° або 150°. **5.9.** 12 см. **5.10.** 24 см. **5.11.** 24 см². **5.12.** $\frac{7}{3}$ см. **5.13.** 1) $\frac{3}{2}$ см, $\frac{25}{8}$ см; 2) 8 см, $\frac{145}{8}$ см. **5.14.** 2 см, $\frac{145}{8}$ см. **5.25.** 3 : 5. **5.26.** $\frac{a^2\sin\beta\sin\gamma}{2\sin(\beta+\gamma)}$. **5.27.** $2R^2 \times \sin\alpha\sin\beta\sin(\alpha+\beta)$. **5.28.** $\frac{b^2\sin\alpha\sin(\alpha+\beta)}{2\sin\beta}$. **5.29.** $\frac{h_1h_2}{2\sin\alpha}$.

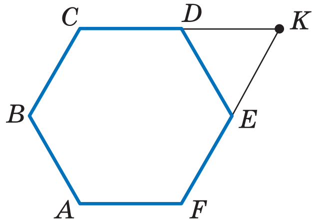
5.30. $\frac{h^2\sin\beta}{2\sin\alpha\sin(\alpha+\beta)}$. **5.31.** 51 см², 75 см², 84 см². **5.32.** $\frac{24}{7}$ см. *Вказівка.* Скористайтеся тим, що $S_{ABC} = S_{ABD} + S_{ACD}$. **5.33.** 360 см². *Вказівка.* Проведіть через один із кінців меншої основи трапеції пряму, паралельну бічній стороні трапеції, та знайдіть висоту трикутника, який ця пряма відтинає від трапеції. **5.34.** $12\sqrt{5}$ см². *Вказівка.* Нехай $ABCD$ — дана трапеція, $BC \parallel AD$. Проведіть через вершину C пряму, яка паралельна прямій BD і перетинає пряму AD у точці E. Доведіть, що трикутник ACE та дана трапеція рівновеликі. **5.35.** 1 : 2. *Вказівка.* $\dfrac{S_{AMK}}{S_{ABC}} = \dfrac{\frac{1}{2}AK \cdot AM \sin A}{\frac{1}{2}AC \cdot AB \sin A} = \cos^2 A.$

5.36. 19,5 см. **5.37.** 13 см, 14 см, 15 см. **5.39.** 10°. **5.40.** 91 см, 21 см. **5.41.** 9,6 см.

§ 2. Правильні многокутники

6. Правильні многокутники та їхні властивості

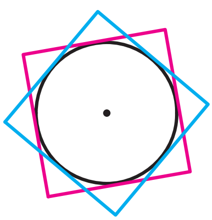
6.20. $\sqrt{R^2 - \dfrac{a^2}{4}}$. **6.21.** $2\sqrt{R^2 - r^2}$. **6.22.** $\sqrt{r^2 + \dfrac{a^2}{4}}$. **6.26.** ≈ 17,4 см. **6.27.** ≈ 19,8 см. **6.28.** 5 сторін. **6.29.** 18 сторін. **6.32.** 1) $\dfrac{a\left(3+\sqrt{3}\right)}{6}$; 2) $\dfrac{a\left(3-\sqrt{3}\right)}{6}$. **6.33.** 1) $\dfrac{2a\sqrt{3}}{3}$; 2) $\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$. **6.34.** 1 : 2. **6.35.** $\sqrt{3} : 2$. **6.38.** 4,4 см. **6.39.** $2R^2\sqrt{2}$. **6.40.** $a\sqrt{3}$; $2a$; $\dfrac{3a^2\sqrt{3}}{2}$. **6.41.** $6\left(\sqrt{2}-1\right)$ см. **6.42.** 8 см. **6.43.** $a\sqrt{2+\sqrt{2}}$, $a\left(\sqrt{2}+1\right)$, $a\sqrt{4+2\sqrt{2}}$. **6.44.** $\dfrac{a\left(2+\sqrt{3}\right)}{2}$. **6.45.** $\dfrac{a\left(2+\sqrt{2}\right)}{2}$. **6.46.** Трикутників, або квадратів, або шестикутників. *Вказівка.* Навколо однієї точки можна викласти стільки дощечок, у скільки разів кут при вершині дощечки, який дорівнює $\dfrac{180°\,(n-2)}{n}$, менший від 360°, тобто $360° : \dfrac{180°\,(n-2)}{n} = \dfrac{2n}{n-2}$ дощечок. Значення виразу $\dfrac{2n}{n-2}$ має бути натуральним числом. Оскільки $\dfrac{2n}{n-2} = \dfrac{2n-4+4}{n-2} = 2 + \dfrac{4}{n-2}$, то значення виразу $\dfrac{4}{n-2}$ має бути натуральним числом. **6.47.** *Вказівка.* Нехай $ABCDEF$ — правильний шестикутник (див. рисунок), K — точка перетину прямих CD і EF. Тоді AK — шуканий відрізок. **6.49.** 18 см. **6.50.** 96 см². **6.51.** 9 см.



До задачі 6.47

7. Довжина кола. Площа круга

7.25. 22,5°. **7.30.** $\sqrt{6}$ см. **7.32.** 1) $\frac{25\left(\pi - 2\sqrt{2}\right)}{8}$ см^2; 2) $\frac{25(5\pi - 3)}{12}$ см^2; 3) $\frac{25(11\pi + 3)}{12}$ см^2. **7.33.** 1) $\frac{2\pi - 3\sqrt{3}}{3}$ см^2; 2) $\frac{10\pi + 3\sqrt{3}}{3}$ см^2. **7.38.** 2π см, $\frac{10\pi}{3}$ см, $\frac{20\pi}{3}$ см. **7.39.** $\frac{25\pi}{18}$ см, $\frac{35\pi}{18}$ см, $\frac{20\pi}{3}$ см. **7.40.** $\frac{8\pi}{3}$ см. **7.41.** 6π см. **7.42.** 1 : 1. *Вказівка*. Доведіть, що в обох випадках сума довжин півкіл дорівнює $\frac{1}{2}\pi AB$. **7.44.** 50 см. **7.46.** $\frac{a^2(\pi - 2)}{8}$. **7.47.** $\approx 17{,}3$ %. **7.48.** $\frac{a^2\left(4\pi - 3\sqrt{3}\right)}{36}$. **7.49.** $\frac{\pi R^2}{9}$. **7.50.** $a^2\left(\frac{\pi}{2} - 1\right)$. **7.51.** $\frac{2\pi a}{3}$. *Вказівка*. Розгляньте трикутник AND і доведіть, що він рівносторонній. **7.52.** *Вказівка*. Сума площ усіх зафарбованих і незафарбованих серпиків дорівнює сумі площ двох кругів, діаметри яких є сусідніми сторонами прямокутника, а сума площ незафарбованих серпиків і прямокутника дорівнює площі круга, діаметр якого є діагоналлю прямокутника. Покажіть, що ці суми рівні. **7.53.** *Вказівка*. Спільна частина квадратів містить круг, радіус якого дорівнює $\frac{1}{2}$ см (див. рисунок). **7.55.** $\frac{130}{17}$ см, $\frac{312}{17}$ см. **7.56.** *Вказівка*. Через середину меншої основи проведіть прямі, паралельні бічним сторонам трапеції.



До задачі 7.53

§ 3. Декартові координати на площині

8. Відстань між двома точками із заданими координатами. Координати середини відрізка

8.13. 1) Так, точка B лежить між точками A і C; 2) ні. **8.15.** $x = 7$ або $x = -1$. **8.16.** (3; 0). **8.17.** (0; 0,5). **8.18.** (3; −0,5). **8.19.** (−2; 2). **8.20.** (3; −2). **8.24.** A (−5; 3), C (7; 5). **8.25.** $2\sqrt{73}$. **8.26.** $\left(3\sqrt{3};\ 2\sqrt{3}\right)$ або $\left(-3\sqrt{3};\ -2\sqrt{3}\right)$. **8.27.** $\left(-2;\ 4\sqrt{3}\right)$ або $\left(-2;\ -4\sqrt{3}\right)$. **8.28.** (3; 3) або (−6; 6). *Вказівка*. Розгляньте два випадки: B $(a;\ a)$ або B $(a;\ -a)$. **8.29.** (5,5; 0), (3; 0), (−1; 0). *Вказівка*. Розгляньте три випадки: $AC = BC$, $AC = AB$ і $BC = AB$. **8.30.** (0; 6), (0; 4), (0; 3,5), (0; 8,5). *Вказівка*. Розгляньте три випадки: $AC^2 + BC^2 = AB^2$, $AB^2 + BC^2 = AC^2$, $AC^2 + AB^2 = BC^2$. **8.31.** $\sqrt{33}$ см. **8.32.** 56°, 124°. **8.33.** 8 см і 16 см.

9. Рівняння фігури. Рівняння кола

9.16. Два кола: $x^2 + (y - 11)^2 = 45$ і $x^2 + (y + 1)^2 = 45$. **9.17.** $(x - 3)^2 + y^2 = 50$. **9.19.** 1) Так, точка (−1; 5) — центр кола, $R = 7$; 2) ні; 3) ні; 4) так, точка (2; 7) — центр кола, $R = \sqrt{2}$. **9.20.** 1) Точка (0; −8) — центр кола, $R = 2$; 2) точка (4; −2) — центр кола, $R = \sqrt{5}$. **9.21.** $(x - 2)^2 + y^2 = 13$. **9.22.** $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 25$ або $(x - 3)^2 + (y - 8)^2 = 25$. **9.23.** $(x + 5)^2 + (y - 2)^2 = 10$ або $(x + 1)^2 + (y + 2)^2 = 10$. **9.24.** $(x - 2)^2 + (y + 2)^2 = 4$ або $(x + 2)^2 + (y + 2)^2 = 4$. *Вказівка*. Діаметр шуканого кола дорівнює відстані між віссю абсцис і прямою $y = -4$, а центр кола належить бісектрисі третього або четвертого координатного кута. **9.25.** $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 1$ або $(x - 1)^2 + (y + 1)^2 = 1$. **9.26.** 1) $(x + 3)^2 + (y - 2)^2 = 25$; 2) $(x + 1)^2 + (y + 3)^2 = 169$. **9.27.** $180\sqrt{3}$ см². **9.28.** 70 см. **9.29.** 600 см².

10. Рівняння прямої

10.7. 1) $y = 2x - 5$; 2) $x = 3$; 3) $y = -1$; 4) $5x + 3y = 6$. **10.8.** 1) $y = -3x + 1$; 2) $x - 6y = 12$. **10.9.** 1) (−8; −31); 2) (−1; 2). **10.10.** 1) (2; −7); 2) (4; −1). **10.11.** $y = -0{,}5x - 4$. **10.12.** $y = \frac{1}{3}x - \frac{1}{6}$. **10.14.** 12. **10.15.** 28. **10.16.** 6. **10.17.** (2; 5), (5; 2). **10.18.** (5; 0). **10.20.** $\frac{10\sqrt{29}}{29}$. *Вказівка*. Шукана відстань дорівнює висоті трикутника, обмеженого осями координат і даною прямою. **10.21.** $4\sqrt{2}$. **10.22.** $3\sqrt{10}$. **10.23.** $x - 3y = 2$. **10.24.** $7x + 5y = -8$. **10.25.** (3; 3) або (15; 15). **10.26.** (−2; 2) або (−10; 10). **10.27.** $(x - 3)^2 + (y - 4)^2 = 17$. **10.28.** $(y - 4)(y + 4) = 0$. **10.29.** $\sqrt{10}$ см, $\sqrt{58}$ см. **10.30.** 104 см. **10.31.** 12,5 см.

11. Кутовий коефіцієнт прямої

11.5. 1) $y = 4x + 19$; 2) $y = -3x - 2$; 3) $y = 7$. **11.6.** $y = -0{,}5x - 4$. **11.7.** 1) $y = -7x + 2$; 2) $3x - 4y = -39$. **11.8.** 1) $y = 9x + 13$; 2) $3x + y = 9$. **11.9.** 1) $y = x\sqrt{3} + 6 - 2\sqrt{3}$; 2) $y = -x\sqrt{3} + 6 + 2\sqrt{3}$. **11.10.** 1) $y = x - 5$; 2) $y = -x + 1$. **11.11.** *а*) $y = \frac{x\sqrt{3}}{3} + 3$; *б*) $y = -\frac{x\sqrt{3}}{3} + 2$. **11.12.** 1) Так; 2) так; 3) ні; 4) ні. **11.14.** $y = 4x + 9$. **11.15.** $y = 3x - 12$. **11.16.** $y = x + 4$. **11.18.** 30 см, 40 см. **11.19.** 144 см^2.

§ 4. Вектори

12. Поняття вектора

12.26. Прямокутник або рівнобічна трапеція. **12.34.** 60°, 120°. **12.35.** 4 см, 12 см. **12.36.** $\frac{a\sqrt{13}}{3}$. *Вказівка*. Проведіть через вершину B пряму, паралельну прямій MK.

13. Координати вектора

13.16. $\overrightarrow{AF}(-2; 2)$, $\overrightarrow{FD}(2; 4)$. **13.17.** $\overrightarrow{DE}(-4; 6)$, $\overrightarrow{EO}(-4; -6)$. **13.18.** $\vec{a}(-6; -8)$ або $\vec{a}(8; 6)$. **13.19.** $\vec{c}\left(\sqrt{2}; \sqrt{2}\right)$ або $\vec{c}\left(-\sqrt{2}; -\sqrt{2}\right)$. **13.20.** C (7; 17), D (2; 17) або C (7; −7), D (2; −7). **13.21.** B (16; 2), C (16; −6) або B (−14; 2), C (−14; −6). **13.23.** 20 см, 7 см, 21 см. **13.24.** $\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$.

14. Додавання і віднімання векторів

14.45. 1) Так; 2) так; 3) ні. **14.46.** *Вказівка*. Покажіть, що кожний із векторів $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}$ і $\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD}$ дорівнює нуль-вектору. **14.48.** *Вказівка*. Достатньо показати, що $\overrightarrow{XA} - \overrightarrow{XB} = \overrightarrow{XD} - \overrightarrow{XC}$. **14.49.** Коло радіуса AB із центром у точці A. **14.50.** Серединний перпендикуляр відрізка AB. **14.51.** 0,2 м/с, $\sqrt{1{,}04}$ м/с. **14.52.** 60°. **14.53.** *Вказівка*. Нехай відрізок AA_1 — медіана трикутника ABC.

На продовженні відрізка AA_1 за точку A_1 відкладіть відрізок A_1D, рівний MA_1. **14.54.** *Вказівка*. Маємо: $\overrightarrow{A_2A_1}+\overrightarrow{A_1B_1}+\overrightarrow{B_1B_2}+\overrightarrow{B_2C_1}+$ $+\overrightarrow{C_1C_2}+\overrightarrow{C_2A_2}=\vec{0}$, $\overrightarrow{A_1B_1}+\overrightarrow{B_2C_1}+\overrightarrow{C_2A_2}=\vec{0}$, звідси $\overrightarrow{A_2A_1}+\overrightarrow{B_1B_2}+\overrightarrow{C_1C_2}=\vec{0}$. **14.55.** 4 см, 6 см. **14.56.** 2,5 см.

15. Множення вектора на число

15.31. −4; 4. **15.32.** −1,5. **15.34.** $\vec{m}$ (−15; 36). **15.35.** $\vec{a}$ (−3; 4). **15.38.** $x=2, y=-3$. **15.39.** $\overrightarrow{OK}=0{,}5\vec{a}-0{,}1\vec{b}$. **15.43.** $\overrightarrow{BM}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$. **15.45.** *Вказівка*. З одного боку, $\overrightarrow{M_1M_2}=\overrightarrow{M_1B_1}+\overrightarrow{B_1B_2}+\overrightarrow{B_2M_2}$. З другого боку, $\overrightarrow{M_1M_2}=\overrightarrow{M_1A_1}+\overrightarrow{A_1A_2}+\overrightarrow{A_2M_2}$. Додайте ці рівності. **15.51.** *Вказівка*. Нехай відрізки AA_1, BB_1 і CC_1 — медіани трикутника ABC. Скористайтеся тим, що $\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{BB_1}+\overrightarrow{CC_1}=\vec{0}$. **15.52.** *Вказівка*. Скористайтеся задачею 15.45 і ключовою задачею 1 п. 15. **15.53.** *Вказівка*. Виразіть вектори $\overrightarrow{BM}$ і $\overrightarrow{BN}$ через вектори $\overrightarrow{BA}$ і $\overrightarrow{BC}$. **15.54.** 18 см. **15.55.** 60°; $24\sqrt{3}$ см². **15.56.** $R\sqrt{3}$.

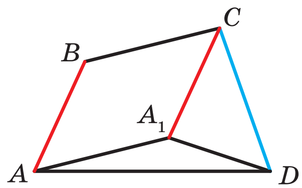
16. Скалярний добуток векторів

16.17. 1) $\frac{1}{2}$; 2) 1; 3) $\frac{1}{2}$; 4) 0. **16.20.** −3 і 3. **16.21.** −1. **16.23.** $\vec{b}$ (−12; 16). **16.24.** −1 і 1. **16.26.** 4. **16.27.** −0,5. **16.28.** $\sqrt{7}$. **16.29.** $2\sqrt{7}$. **16.32.** $\frac{3}{5}$, 0, $\frac{4}{5}$. **16.33.** 30°, 60°, 90°. **16.36.** 0°. **16.37.** 120°. **16.38.** *Вказівка*. Нехай $\overrightarrow{CA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{CB}=\vec{b}$. Тоді $\overrightarrow{CM}=\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}$, $\overrightarrow{AK}=-\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}$. Знайдіть скалярний добуток $\overrightarrow{CM}\cdot\overrightarrow{AK}$. **16.39.** 45°. *Вказівка*. Нехай $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{OC}=\vec{c}$. Виразіть вектори $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{DC}$ через вектори $\vec{b}$ і $\vec{c}$. **16.40.** 30°. *Вказівка*. $\overrightarrow{BD}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}\right)$. Звідси $\overrightarrow{BD}^2=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{BC}\right)$, $\overrightarrow{BD}^2=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{BD}\right|\cdot\left|\overrightarrow{BA}\right|\cdot\cos\angle ABD$. **16.41.** *Вказівка*. $\overrightarrow{BD}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}\right)$, $\overrightarrow{MF}=\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{BF}$. Залишилося показати, що $\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{MF}=0$. **16.43.** 100 см. **16.44.** 6π см.

§ 5. Геометричні перетворення

17. Рух (переміщення) фігури. Паралельне перенесення

17.13. При $AB \parallel a$. **17.23.** Безліч. **17.29.** $(x+3)^2+(y-4)^2=1$. **17.30.** $y=x^2-4x+1$. **17.31.** *Вказівка.* Нехай $ABCD$ — шукана трапеція ($BC \parallel AD$). Побудуйте образ діагоналі BD при паралельному перенесенні на вектор $\overrightarrow{BC}$. **17.33.** *Вказівка.* Побудуйте образ даної прямої при паралельному перенесенні на вектор $\overrightarrow{AB}$ $\left(\text{або } \overrightarrow{BA}\right)$. Розгляньте точки перетину образу з даним колом. Зауважимо, що коли побудований образ і дане коло не мають спільних точок, то задача не має розв'язку. **17.35.** *Вказівка.* Нехай $ABCD$ — шуканий чотирикутник з даними сторонами AB і CD (див. рисунок). Розглянемо паралельне перенесення сторони AB на вектор $\overrightarrow{BC}$. Трикутник A_1CD можна побудувати за двома сторонами CD і $CA_1 = BA$ та кутом A_1CD, який дорівнює $\angle BCD - (180° - \angle ABC)$. Трикутник AA_1D можна побудувати за стороною A_1D і двома прилеглими кутами AA_1D і ADA_1. **17.36.** *Вказівка.* Нехай точка A_1 — образ точки A при паралельному перенесенні на вектор $\overrightarrow{MN}$. Сполучіть точки A_1 і B. **17.37.** 36 см. **17.38.** 40. **17.39.** 490 см^2.

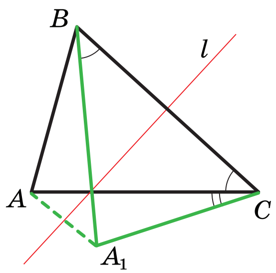


До задачі 17.35

18. Осьова симетрія

18.21. $a \perp l$ або прямі a і l збігаються. **18.24.** *Вказівка.* Якщо чотирикутник має вісь симетрії, то образом будь-якої його вершини є вершина цього самого чотирикутника. Виберіть деяку вершину паралелограма та розгляньте дві можливості: її образом є або сусідня вершина, або протилежна. **18.27.** *Вказівка.* Кути M_1BA і MBA є симетричними відносно прямої AB. Отже, $\angle M_1BA = \angle MBA$. Аналогічно $\angle M_2BC = \angle MBC$. Залишилося показати, що $\angle M_1BM_2 = 180°$. **18.28.** 1) $A_1\,(0;\ -2)$, $B_1\,(-1;\ 3)$; 2) $A_2\,(0;\ 2)$, $B_2\,(1;\ -3)$. **18.29.** $x = 2$,

$y = -1$. **18.30.** *Вказівка*. Нехай точка A_1 — образ точки A при симетрії відносно прямої a. Тоді точка перетину прямих a і A_1B буде шуканою. Зауважимо, що коли точки A і B симетричні відносно прямої a, то задача має безліч розв'язків. Якщо точки A і B рівновіддалені, але не симетричні відносно прямої a, то задача не має розв'язку. **18.32.** *Вказівка*. Нехай точка A_1 — образ точки A при симетрії відносно прямої a. Тоді точка перетину прямих a і A_1B буде шуканою. **18.33.** *Вказівка*. Нехай трикутник A_1BC — образ трикутника ABC при симетрії відносно серединного перпендикуляра відрізка BC (див. рисунок). Трикутник ACA_1 можна побудувати за відомими сторонами AC і A_1C ($A_1C = AB$) та кутом ACA_1, який дорівнює різниці кутів B і C. **18.34.** *Вказівка*. Нехай точка C_1 симетрична точці C відносно прямої AB. Побудуйте коло із центром у точці C_1, яке дотикається до прямої AB. Проведіть через точку D дотичну до побудованого кола. Ця дотична перетинає пряму AB у шуканій точці. **18.35.** *Вказівка*. Нехай пряма l — серединний перпендикуляр діагоналі AC. Точка B_1 симетрична точці B відносно прямої l. Скористайтеся тим, що чотирикутники $ABCD$ і AB_1CD рівновеликі. **18.36.** Точка перетину висот трикутника ABC. **18.37.** CD; 7 см, 10 см. **18.39.** $y = 0{,}5x - 0{,}5$.

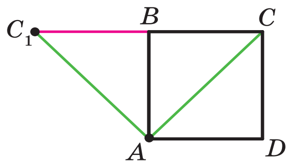


До задачі 18.33

19. Центральна симетрія. Поворот

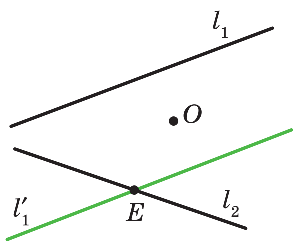
19.22. *Вказівка*. Припустимо, що трикутник ABC має центр симетрії. Тоді, наприклад, образом вершини A є вершина B. Отже, центр симетрії — це середина сторони AB. Проте в цьому випадку образ вершини C не належатиме трикутнику ABC. **19.24.** *Вказівка*. При центральній симетрії образом сторони даного чотирикутника є сторона цього самого чотирикутника. Далі скористайтеся ключовою задачею 1 п. 19. **19.25.** *Вказівка*. При симетрії відносно точки O

образи точок A_1 і B_1 належать колу із центром O_2. Оскільки образом прямої, яка проходить через центр симетрії, є ця сама пряма, то образи точок A_1 і B_1 також належать прямій A_1B_1. Отже, відрізок A_2B_2 — образ відрізка A_1B_1. **19.26.** 2 см або 1 см. **19.27.** 2 см. *Вказівка*. При розглядуваному повороті точка B є образом точки D, точка C_1 — образом точки C, точка A — образом точки A (див. рисунок). Отже, трикутник ABC_1 — образ трикутника ADC. Звідси $\angle ABC_1 = \angle ADC = 90°$. Отже, точки C_1, B і C лежать на одній прямій.



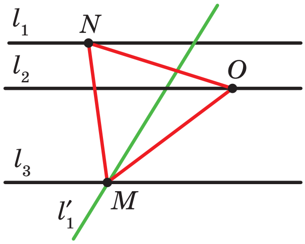
До задачі 19.27

19.28. *Вказівка*. Розгляньте центральну симетрію із центром у точці перетину діагоналей одного з паралелограмів. **19.29.** *Вказівка*. Знайдіть середину відрізка AC, а далі скористайтеся задачею 2 п. 19. **19.30.** *Вказівка*. Нехай O — дана точка, l_1 і l_2 — дані прямі. Побудуємо образ прямої l_1 при симетрії відносно точки O. Отримаємо пряму l_1' (див. рисунок), яка перетинає пряму l_2 у точці E. Знайдемо прообраз точки E при розглядуваній симетрії. Очевидно, що він має належати прямій l_1. Отже, точка, симетрична точці E відносно точки O, також належить прямій l_1.



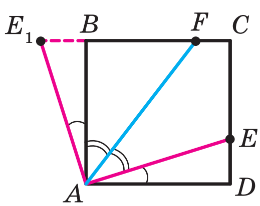
До задачі 19.30

19.31. *Вказівка*. Скористайтеся ідеєю розв'язування задачі 4 п. 19. **19.32.** *Вказівка*. Розглянемо поворот із центром у точці C проти годинникової стрілки на кут 60°. При такому повороті образами точок E і B будуть відповідно точки D і A. Отже, відрізок AD і його середина K будуть відповідно образами відрізка BE і його середини M. **19.33.** *Вказівка*. Нехай l_1, l_2 і l_3 — дані паралельні прямі, O — довільна точка прямої l_2 (див. рисунок). Пряма l_1' — образ прямої l_1 при повороті навколо точки O проти годинникової стрілки на кут $60°$ — перетинає пряму l_3 у точці M. Знайдемо прообраз точки M при заданому повороті. Очевидно, що він належить прямій l_1. Тому достатньо відкласти від променя OM кут, що дорівнює $60°$.



До задачі 19.33

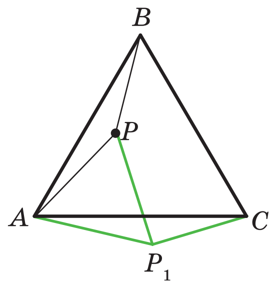
19.34. *Вказівка*. Нехай O — дана точка, l_1, l_2 і l_3 — дані прямі. Побудуйте відрізок AC, серединою якого є точка O, а кінці належать прямим l_1 і l_2. Цей відрізок є однією з діагоналей ромба. Знайдіть точку перетину прямої l_3 із серединним перпендикуляром відрізка AC. **19.35.** *Вказівка*. Розглянемо поворот із центром у точці A проти годинникової стрілки на кут $90°$. При цьому повороті образом відрізка AD буде відрізок AB (див. рисунок). Нехай точка E_1 — образ точки E. Тоді трикутник ABE_1 — образ трикутника ADE. Звідси $\Delta ABE_1 = \Delta ADE$. Тоді $DE = BE_1$, $AE = AE_1$, $\angle E_1AB = \angle EAD$. Маємо: $\angle E_1AF = \angle E_1AB + \angle BAF = \angle EAD + \angle FAE = \angle FAD$. Але $\angle FAD = \angle E_1FA$. Отже, трикутник AE_1F рівнобедрений і $AE_1 = E_1F$.



До задачі 19.35

19.36. *Вказівка*. Розглянемо поворот із центром у точці A за годинниковою стрілкою на кут $60°$ (див. рисунок). При цьому повороті образом трикутника ABP буде трикутник ACP_1 (точка P_1 —

образ точки P). Звідси $\angle AP_1C = \angle APB = 150°$. Трикутник APP_1 рівносторонній. Тоді $\angle AP_1P = 60°$. Отже, $\angle PP_1C = 90°$. Залишилося зауважити, що $P_1C = PB$ і $PP_1 = AP$. **19.39.** $\frac{120}{7}$ см.

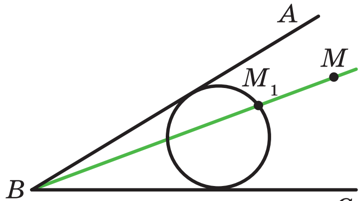


До задачі 19.36

20. Подібність фігур

20.20. 1) 1,5; 2) $-\frac{1}{2}$; 3) $\frac{2}{3}$. **20.24.** $\frac{1}{3}$. **20.25.** 12 см. **20.26.** 28,8 см². **20.28.** $\frac{S}{16}$. **20.29.** 1) $k = 2$, точка B або $k = -2$, точка перетину діагоналей трапеції $AMNC$. **20.34.** *Вказівка.* Нехай дане коло дотикається до прямої a в точці M. Точка M_1 — образ точки M при гомотетії із центром A. Оскільки образом прямої a є ця сама пряма, то точка M_1 належить прямій a. Покажіть, що образ даного кола та пряма a мають тільки одну спільну точку M_1. **20.35.** $-\frac{1}{2}$. *Вказівка.* За означенням гомотетії $\overrightarrow{MA} = k\overrightarrow{MB}$. Знайдіть координати векторів $\overrightarrow{MA}$ і $\overrightarrow{MB}$. **20.36.** (−3; 2). **20.37.** 1) $x = -3$, $y = 8$; 2) $x = 12$, $y = -2$. **20.38.** $x = 0$, $y = 8$. **20.39.** 28 см². **20.40.** 20 см². **20.41.** 112 см². **20.43.** 1) $y = 2x + 2$; 2) $y = 2x - \frac{1}{2}$. *Вказівка.* Скористайтеся тим, що кутовий коефіцієнт шуканої прямої дорівнює 2. **20.44.** 1) $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 1$; 2) $(x - 4)^2 + (y + 8)^2 = 16$. **20.45.** *Вказівка.* Пряма A_2B_2 є образом прямої A_1B_1 при гомотетії із центром у точці дотику та коефіцієнтом, який дорівнює відношенню більшого радіуса до меншого. **20.47.** Коло, яке є образом даного кола при гомотетії із центром A та коефіцієнтом $\frac{1}{2}$, за винятком точки A. **20.49.** *Вказівка.*

Трикутник з вершинами в отриманих точках є образом трикутника з вершинами в серединах сторін даного трикутника при гомотетії із центром M і коефіцієнтом 2. **20.50.** *Вказівка.* Побудуйте довільний трикутник, два кути якого дорівнюють двом даним кутам. Опишіть навколо нього коло. Шуканий трикутник є образом побудованого трикутника при гомотетії із центром у довільній точці та коефіцієнтом, що дорівнює відношенню даного радіуса до радіуса побудованого кола. **20.52.** *Вказівка.* Див. розв'язання задачі 2 п. 20. **20.53.** *Вказівка.* Розгляньте гомотетію із центром у середині відрізка AB і коефіцієнтом $\frac{1}{3}$. **20.54.** Пряма, яка є образом прямої l при гомотетії із центром у середині відрізка AB і коефіцієнтом $\frac{1}{3}$, за винятком точки перетину прямих AB і l (якщо така точка існує). **20.55.** *Вказівка.* Побудуйте довільне коло, яке дотикається до сторін кута (див. рисунок). Нехай M_1 — одна з точок перетину прямої BM з побудованим колом. Розгляньте гомотетію із центром у точці B і коефіцієнтом, що дорівнює відношенню $\frac{BM}{BM_1}$. Задача має два розв'язки. **20.56.** 96 см^2, 4,8 см. **20.57.** 24.



До задачі 20.55

21. Вправи для повторення курсу геометрії 9 класу

21.1. $2\sqrt{17}$ см або $2\sqrt{41}$ см. **21.2.** $\frac{\sqrt{7}+\sqrt{3}-2}{2\sqrt{21}}$. **21.4.** 9 см, 24 см. **21.5.** 1 см або 2 см. **21.6.** 36 см. **21.7.** 4 см. *Вказівка.* Оскільки трапеція $ABCK$ є вписаною, то $AB = CK$. Тоді $\angle KAC = \angle AKB$, $AC = BK$. **21.8.** $\frac{9}{16}$; $-\frac{9}{16}$; $-\frac{1}{8}$; $\frac{1}{8}$. **21.9.** $\sqrt{111}$ см. **21.10.** 9,5 см. **21.11.** 12 см. **21.12.** $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. **21.13.** $1:1:\sqrt{3}$. **21.14.** 6 см.

21.15. $\frac{7\sqrt{3}}{3}$ см. **21.16.** $\frac{bc\sin\alpha}{(b+c)\sin\frac{\alpha}{2}}$. *Вказівка.* Скористайтеся формулою для обчислення площі трикутника за двома сторонами та кутом між ними. **21.17.** $4\sqrt{3}$ см². **21.18.** 12 см, $\frac{3}{2}$ см, $\frac{65}{8}$ см. **21.19.** 15 см. **21.20.** 132 см². **21.21.** 450 см². **21.22.** 36 см². **21.24.** $6\sqrt{3}$ см². **21.25.** 1 : 2. **21.26.** $2a\left(2-\sqrt{3}\right)$. **21.27.** 45 см. **21.28.** $\frac{32\pi}{15}$ см. **21.30.** $\frac{R^2\left(4\pi-3\sqrt{3}\right)}{6}$; $\frac{4}{3}\pi R$. **21.31.** 54°. **21.33.** $\frac{3m}{4}$. **21.34.** $\frac{R^2\left(3\sqrt{3}-\pi\right)}{3}$. **21.36.** (−9; 0). **21.37.** (0; −2,5). **21.41.** $(x-7)^2+(y+0,5)^2=6,25$. **21.42.** Так. **21.43.** Так. **21.44.** (−1; 0), (−9; 0). **21.45.** 10π. **21.46.** $y=6x+23$. **21.47.** $y=-x+3$. **21.48.** $y=-\frac{5}{3}x-4$. **21.49.** $5x+7y=8$. **21.61.** $-\frac{4}{5}$. **21.62.** $\frac{\sqrt{2}}{10}$. **21.64.** $5x+y=22$. **21.81.** 3 см або $3\sqrt{3}$ см. **21.82.** 3 см². **21.83.** 27,5 см². **21.84.** $\frac{320}{27}$ см². **21.85.** $\frac{25}{16}$ см². *Вказівка.* Трикутник $A_2B_2C_2$ є образом трикутника ABC при гомотетії з коефіцієнтом $-\frac{5}{4}$ і центром у точці перетину медіан трикутника ABC.

Відповіді до завдань «Перевірте себе» в тестовій формі

Номер завдання	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	Г	В	А	Б	А	Г	А	В	Б	Б	Г	Б
2	В	Б	Б	А	А	Г	Г	В	Г	В	Б	А
3	Б	Б	А	В	Б	Г	В	Г	Б	В	Б	А
4	В	Г	А	В	А	А	Б	Г	В	А	Г	В
5	Б	А	Г	В	В	Б	Г	А	В	В	А	Г

Предметний покажчик

ЗМІСТ

Видано за рахунок державних коштів.
Продаж заборонено

Навчальне видання

МЕРЗЛЯК Аркадій Григорович
ПОЛОНСЬКИЙ Віталій Борисович
ЯКІР Михайло Семенович

ГЕОМЕТРІЯ
підручник для 9 класу загальноосвітніх навчальних закладів

Рекомендовано
Міністерством освіти і науки України

Головний редактор *Г. Ф. Висоцька*
Відповідальний за випуск *Д. В. Москаленко*
Літературний редактор *Т. Є. Цента*
Художнє оформлення та дизайн *Д. В. Висоцький*
Технічний редактор *О. В. Лісневська*
Коректор *Т. Є. Цента*
Комп'ютерне верстання *С. І. Северин*

Формат 60×90/16. Папір офсетний. Гарнітура шкільна.
Друк офсетний. Ум. друк. арк. 15,00. Обл.-вид. арк. 13,88.
Тираж 167 024 прим. Замовлення №

ТОВ ТО «Гімназія»,
вул. Восьмого Березня, 31, м. Харків 61052
Тел.: (057) 719-17-26, (057) 719-46-80, факс: (057) 758-83-93
E-mail: contact@gymnasia.com.ua
www.gymnasia.com.ua
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 644 від 25.10.2001

Надруковано з діапозитивів, виготовлених ТОВ ТО «Гімназія»,
у друкарні ПП «Модем»,
вул. Восьмого Березня, 31, м. Харків 61052
Тел. (057) 758-15-80
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ХК № 91 від 25.12.2003